§ 10.8. Формула Симпсона *)

В этом параграфе мы вводим важную в прикладном анализе *квадратурную формулу Симпсона*. Она очень проста и в то же время обладает замечательным свойством: она точна для всех многочленов третьей степени.

Начнем с того, что решим задачу: требуется найти числа A, B, C такие, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Af(-1) + Bf(0) + Cf(1) \tag{1}$$

была точна для функций 1, x, x^2. Подставляя эти функции в (1) вместо f, получим систему уравнений

$$2 = A + B + C,\ 0 = -A + C,\ \frac{2}{3} = A + C,$$

откуда $A = C = 1/3$, $B = 4/3$. Но так как $A = C$, то легко проверяется, что полученная формула (1) точна и для функции x^3 и в силу линейности входящих в нее функционалов (см. предыдущий параграф) она точна для всех многочленов не выше третьей степени.

Более общая квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{2}$$

Это простейшая квадратурная формула Симпсона, соответствующая отрезку $[a, b]$.

Докажем, что она точна для многочленов третьей степени. В самом деле, полагая в (2)

$$x = \frac{a+b}{2} + t\,\frac{b-a}{2},\quad F(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + t\,\frac{b-a}{2}\right),$$

и сокращая на $(b-a)/2$, получим

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt \approx \frac{1}{3}\,(F(-1) + 4F(0) + F(1)). \tag{3}$$

Но формула (3) точна для многочленов от t не выше третьей степени, поэтому и формула (2) точна для многочленов от x не выше третьей степени — ведь подстановка $x = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ переводит многочлены не выше 3-й степени в многочлены не выше 3-й степени.

*) Т. Симпсон (1710—1761) — английский математик.

Если разделить отрезок $[a, b]$ на $2N$ равных частей точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{2N} k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2N)$$

и к отрезкам $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ... применить формулу (2), то в результате получим (*усложненную*) *квадратурную формулу Симпсона*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6N}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + f(x_{2N})). \tag{4}$$

С точки зрения практических вычислений сложность вычислений по формуле Симпсона и прямоугольников одинакова. Но если функция f достаточно гладкая, то ошибка приближения по формуле Симпсона при больших N значительно меньше соответствующей ошибки при приближении методом прямоугольников (см. § 10.9).

§ 10.9. Общий метод получения оценок квадратурных формул

Формулу

$$\int_0^1 f(t)\,dt \approx \sum_0^n p_k f(t_k) = L(f) \tag{1}$$

для отрезка $[0, 1]$ мы будем называть *канонической квадратурной формулой с узлами*

$$0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1 \tag{2}$$

и весами

$$p_0, p_1, \ldots, p_n. \tag{3}$$

Канонической формуле (1) соответствует квадратурная формула для отрезка $[c, d]$:

$$\int_c^d f(x)\,dx \approx (d-c)\sum_0^n p_k f(c + (d-c)t_k) =$$
$$= (d-c)L(f(c+(d-c)t)). \tag{4}$$

Узлы ее $c + (d-c)t_k$ делят отрезок $[c, d]$ в том же отношении, в каком узлы t_k канонической формулы делят $[0, 1]$, а веса равны $(d-c)p_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Если разделить отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{N} k \quad (k = 0, 1, \ldots, N)$$