Если разделить отрезок $[a, b]$ на $2N$ равных частей точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{2N} k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2N)$$

и к отрезкам $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ... применить формулу (2), то в результате получим (*усложненную*) *квадратурную формулу Симпсона*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6N} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + f(x_{2N})). \tag{4}$$

С точки зрения практических вычислений сложность вычислений по формуле Симпсона и прямоугольников одинакова. Но если функция f достаточно гладкая, то ошибка приближения по формуле Симпсона при больших N значительно меньше соответствующей ошибки при приближении методом прямоугольников (см. § 10.9).

§ 10.9. Общий метод получения оценок квадратурных формул

Формулу

$$\int_0^1 f(t)\,dt \approx \sum_0^n p_k f(t_k) = L(f) \tag{1}$$

для отрезка $[0, 1]$ мы будем называть *канонической квадратурной формулой с узлами*

$$0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1 \tag{2}$$

и весами

$$p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_n. \tag{3}$$

Канонической формуле (1) соответствует квадратурная формула для отрезка $[c, d]$:

$$\int_c^d f(x)\,dx \approx (d-c) \sum_0^n p_k f(c + (d-c)\,t_k) =$$
$$= (d-c)\, L(f(c + (d-c)\,t)). \tag{4}$$

Узлы ее $c + (d-c)t_k$ делят отрезок $[c, d]$ в том же отношении, в каком узлы t_k канонической формулы делят $[0, 1]$, а веса равны $(d-c)p_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Если разделить отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{N} k \quad (k = 0, 1, \ldots, N)$$

и к каждому отрезку $[x_k, x_{k+1}]$ применить формулу, соответствующую канонической,

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right),$$

затем просуммировать ее левые и правые части по k, то получим формулу

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right), \qquad (5)$$

которую мы называем *усложненной квадратурной формулой, соответствующей канонической формуле* (1).

Чтобы получить оценку ошибки при помощи формулы (5), будем предполагать, что исходная каноническая формула точна для всех многочленов степени не выше $r-1$.

Обозначим через $W^r(a, b)$ класс функций f, заданных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на нем непрерывную кусочно гладкую производную порядка $r-1$ (см. начало § 9.17).

Если функция $f \in W^r(0, 1)$, то для нее имеет место разложение по формуле Тейлора с остатком в интегральной форме (см. § 9.17)

$$f(t) = P(t) + R(t), \text{ где } P(t) = \sum_0^{r-1} a_k t^k,$$

$$R(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^x (t-u)^{r-1} f^{(r)}(u)\,du = \int\limits_0^1 K(t-u) f^{(r)}(u)\,du,$$

$$K(u) = \begin{cases} 0 & (u \leqslant 0), \\ \dfrac{u^{r-1}}{(r-1)!} & (u > 0). \end{cases}$$

Подставим f в каноническую формулу (1), перенеся в ней правую часть в левую. Если учесть, что формула (1) точна для многочлена $P(t)$, то получим

$$\int\limits_0^1 f(t)\,dt - L(f) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 K(t-u) f^{(r)}(u)\,du \right) dt -$$
$$- \int\limits_0^1 \left(\sum_0^n p_k K(t_k - u) \right) f^{(r)}(u)\,du = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 K(t-u)\,dt \right) f^{(r)}(u)\,du -$$
$$- \int\limits_0^1 \left(\sum_0^n p_k K(t_k - u) \right) f^{(r)}(u)\,du = \int\limits_0^1 \Lambda(u) f^{(r)}(u)\,du\,^{*)},$$

*) Мы заменили порядок интегрирования, что обосновывается в теории кратных интегралов.

$$\int_0^1 K(t-u)\,dt = \frac{(1-u)^r}{r!},$$

$$\Lambda(u) = \frac{(1-u)^r}{r!} - \sum_0^n p_k K(t_k - u). \tag{6}$$

Отсюда, вводя обозначения

$$\varkappa = \int_0^1 |\Lambda(u)|\,du, \tag{7}$$

$$\|f^{(r)}\| = \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} |f^{(r)}(u)|, \tag{8}$$

получим оценку

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt - L(f)\right| \leqslant \varkappa \|f^{(r)}\|. \tag{9}$$

Функция $\Lambda(t)$, а вместе с ней константа $\varkappa$, зависит от весов и расположения узлов в формуле (1), но не от f. Константа $\varkappa$ для данной канонической формулы может быть раз навсегда вычислена. Она точна — правая часть достигается для функции $f \in W^{(r)}(0, 1)$, имеющей производную $f^{(r)}(x) = \operatorname{sign}\Lambda(x)$.

Получим теперь оценку ошибки в формуле (4), соответствующей отрезку $[c, d]$, в предположении, что $f \in W^r(c, d)$. Перенеся второй член в (4) в левую часть и сделав подстановку

$$x = c + (d-c)t,\ F(t) = f(c + (d-c)t),$$

и учтя, что $F^{(r)}(t) = (d-c)^r f^{(r)}(x)$, получим

$$\left|\int_c^d f(x)\,dx - (d-c)\,L(f(c+(d-c)\,t))\right| =$$

$$= (d-c)\left|\int_0^1 F(t)\,dt - L(F)\right| \leqslant (d-c)\,\varkappa\,\|F^{(r)}\|_{(0,1)} =$$

$$= (d-c)^{r+1}\varkappa\,\|f^{(r)}\|_{(c,d)}, \tag{10}$$

где $\|\varphi\|_{(c,d)} = \sup\limits_{c\leqslant x\leqslant d} |\varphi(x)|$.

В оценку (10) входит в виде множителя прежняя константа $\varkappa$ и, кроме того, появился новый множитель $(d-c)^{r+1}$, зависящий от длины $d-c$ отрезка $[c, d]$. Последний стремится к нулю вместе с $d-c$, и тем более быстро, чем больше r.

Дадим, наконец, оценку для усложненной формулы (5) в предположении, что $f \in W^r(a, b)$. Так как в таком случае

$f \in W^r(x_k, x_{k+1})$ при любом k, то в силу (10)

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N}t\right)\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^{N-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{N} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N}t\right)\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{b-a}{N}\right)^{r+1} \varkappa \| f^{(r)} \|_{(x_k, x_{k+1})} \leqslant \frac{(b-a)^{r+1}\varkappa}{N^r} \| f^{(r)} \|_{(a,b)}. \quad (11)$$

Будем говорить, что усложненная квадратурная формула имеет свойство T^{r-1}, если она точна для многочленов степени $r-1$. Мы только что доказали, что если функция $f \in W^r(a, b) = W^r$ и ее интеграл на $[a, b]$ приблизить при помощи усложненной квадратурной формулы (5) со свойством T^{r-1}, то оценка приближения имеет порядок N^{-r}.

Отметим без доказательства, что если $f \in W^k$ и формула имеет свойство T^{r-1}, то оценка приближения при $k < r$ и $k \geqslant r$ имеет соответственно порядок N^{-k}, N^{-r}.

Например, усложненная формула Симпсона имеет свойство T^3, поэтому при приближении при ее помощи функций $f \in W^k$ при $k \geqslant 4$ оценка имеет порядок N^{-4}, а при $k < 4$ — порядок N^{-k}.

В заключение сделаем еще следующее замечание. Зададим систему узлов $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$. Произвольный многочлен $P(x)$ степени r можно представить тождественно при помощи интерполяционной формулы Лагранжа (3), (4) § 10.5, где надо считать $n = r$.

Если положить

$$\lambda_k = \int_a^b Q_k(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, r),$$

то мы получим квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^r \lambda_k f(x_k),$$

точную для любого многочлена степени r.

§ 10.10. Еще о длине дуги

В дальнейшем без пояснений предполагается, что Γ есть непрерывная самонепересекающаяся кривая, определенная непрерывными функциями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \geqslant t \geqslant b, \quad (1)$$

Введем обозначения: ρ есть некоторое разбиение

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b \quad (2)$$