Глава 11

РЯДЫ

§ 11.1. Понятие ряда

Выражение
$$u_0+u_1+u_2, \ldots, \tag{1}$$
где числа u_k (*члены ряда*), вообще комплексные, зависят от индексов $k=0, 1, 2, \ldots$, называется *рядом*. Этому выражению мы не приписали никакого числа, потому что сложение бесконечного числа слагаемых не имеет смысла. Ряд (1) еще записывают так:
$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{0}^{\infty} u_k. \tag{2}$$
Эта чисто формальная запись часто более удобна, чем запись (1).

Числа
$$S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n \quad (n=0, 1, \ldots)$$
называются *n-ми частичными суммами ряда* (1).

По определению, ряд (1) сходится, если существует предел
$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$
В этом случае пишут
$$S = u_0+u_1+u_2+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{3}$$
и называют S суммой ряда, т. е. выражениям (1) или (2) приписывают число S. Говорят еще, что ряд (3) сходится к S.

В силу условия Коши (верного и для комплексных чисел) *для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon>0$ нашлось такое N, чтобы для всех натуральных $n>N$ и любого натурального p выполнялось неравенство*
$$|u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}| = |S_{n+p}-S_n| < \varepsilon.$$

Отсюда, в частности (полагая $p=1$), следует, что если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю:
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{4}$$
Но условие (4), будучи необходимым, не является достаточным для сходимости ряда, как это будет видно из дальнейших примеров.

Рассмотрим еще ряд
$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{5}$$

Так как условие Коши сходимости рядов (1) и (5) формулируется совершенно одинаково, то они одновременно либо сходятся либо расходятся (не сходятся). Если они сходятся, то сумма ряда (5) равна

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} u_{n+k} = \lim_{m\to\infty}(S_{n+m}-S_n) = S - S_n.$$

Если члены ряда (1) неотрицательны (таким образом, действительны), то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots$, поэтому, если эта последовательность ограничена,

$$S_n \leqslant M \ (n = 1, 2, \ldots),$$

ряд сходится и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leqslant M.$$

Если же она неограничена, то ряд расходится:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty.$$

Пример 1. Ряд

$$1 + z + z^2 + \ldots \tag{6}$$

имеет (при $z \neq 1$) частичную сумму $S_n(z) = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$. Если $|z| < 1$, то $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$, т. е. $z^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$; если $|z| > 1$, то $|z^{n+1}| \to \infty$ и наконец, если $|z| = 1$, то ряд (6) расходится, потому что в этом случае его общий член, имеющий модуль, равный единице ($|z^{n+1}| = 1$), не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, ряд (6) сходится и имеет сумму, равную $(1 - z)^{-1}$ на открытом круге $|z| < 1$, а для остальных точек z комплексной плоскости он расходится.

§ 11.2. Действия с рядами

Если ряды $\sum_0^\infty u_k$ *и* $\sum_0^\infty v_k$ *сходятся и* α — *число, то ряды* $\sum_0^\infty \alpha u_k$, $\sum_0^\infty (u_k \pm v_k)$ *также сходятся и*

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k, \tag{1}$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k. \tag{2}$$