§ 11.10. Суммирование рядов и последовательностей методом средних арифметических

Пусть задан числовой ряд

$$u_0+u_1+u_2+\dots \tag{1}$$

Положим

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n, \tag{2}$$

$$\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\dots+S_n}{n+1} \quad (n=0,1,2,\dots). \tag{3}$$

По определению, ряд (1) (или последовательность $\{S_n\}$) суммируется методом средних арифметических к числу σ, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma. \tag{4}$$

Теорема. *Если ряд* (1) *сходится к числу S, то он суммируется методом средних арифметических и притом к тому же числу S.*

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится; тогда существует такое $M>0$, что

$$|S_j|\leqslant M \quad (j=0,1,\dots), \tag{5}$$

и такое достаточно большое натуральное n, которое мы будем считать фиксированным (а k, и в дальнейшем p — переменными), что

$$|S_{n+k}-S|<\varepsilon \quad (k=1,\ 2,\ \dots). \tag{6}$$

Имеем, далее,

$$S-\sigma_{n+p}=$$

$$=\left(S-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}S_{n+k}\right)+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}\right)\sum_{k=1}^{p}S_{n+k}-\frac{1}{n+p+1}\sum_{k=0}^{n}S_k,$$

откуда, учитывая, что $\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{n+1}{p(n+p+1)}$, получим

$$|S-\sigma_{n+p}|<\varepsilon+\frac{n+1}{n+p+1}M+\frac{n+1}{n+p+1}M<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon\ (p>p_0),$$

если p_0 достаточно велико. Следовательно, $\sigma_{n+p}\to S$ $(p\to\infty)$ или, что все равно, $\sigma_j\to S$ $(j\to\infty)$, т. е. теорема верна.

Пример. Ряд $1-1+1-\dots$ расходится, но он суммируется к числу $1/2$ методом средних арифметических.