§ 11.11. Степенные ряды

Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

где a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — постоянные, вообще говоря, комплексные числа, а z — комплексная переменная, называется *степенным рядом* с коэффициентами a_k.

В теории степенных рядов центральное место занимает следующая основная теорема.

Теорема 1 (основная). *Для степенного ряда* (1) *существует неотрицательное число R, конечное или бесконечное* $(0 \leqslant R \leqslant \infty)$, *обладающее следующими свойствами*:

1) *ряд сходится, и притом абсолютно, в открытом круге $|z| < R$ и расходится в точках z с $|z| > R$*,

2) *число R определяется по формуле*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2}$$

где в знаменателе стоит верхний предел (*см.* § 3.7).

Мы позволяем себе при этом считать, что $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$. Таким образом, если указанный верхний предел равен 0, то $R = \infty$, если же он равен ∞, то $R = 0$.

Открытый круг $|z| < R$ называется *кругом сходимости степенного ряда*. При $R = \infty$ он превращается во всю комплексную плоскость. При $R = 0$ степенной ряд имеет только одну точку сходимости, именно, точку $z = 0$.

Замечание 1. Число R, удовлетворяющее утверждению 1) теоремы 1, очевидно, единственно.

Замечание 2. Если для степенного ряда (1) существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Поэтому в этом случае

$$R = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Читатель, не ознакомившийся с понятием верхнего предела, может проследить за ходом доказательства теоремы 1, предположив, что для рассматриваемого степенного ряда указанный предел существует. В этом случае всюду в проводимых ниже рассуждениях надо заменить $\overline{\lim}$ на $\lim$.

Доказательство теоремы 1. Пусть число R определяется по формуле (2). В точке $z = 0$ степенной ряд сходится, поэтому теорема при $z = 0$, $|z| = 0 < R$, верна.

Будем далее считать, что $|z|>0$. Наряду с рядом (1) введем второй ряд, составленный из его модулей,

$$|a_0|+|a_1z|+|a_2z^2|+\ldots. \tag{1'}$$

Общий член второго ряда обозначим через

$$u_n=|a_nz^n| \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{3}$$

Согласно обобщенному признаку Коши сходимости ряда (см. § 11.3 теорема 3, в)), если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}<1$, то ряд (1′) сходится, если же $\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n}>1$, то ряд (1) расходится и его общий член не ограничен. Но

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_nz^n|}=\overline{\lim}\left(|z|\sqrt[n]{|a_n|}\right)=$$
$$=|z|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=|z|/R.$$

Здесь мы вынесли за знак верхнего предела конечное число $|z|>0$ (см. § 3.7, теорема 6).

Из сказанного следует:

Если $|z|<R$, т. е. $|z|/R<1$, то ряд (1′) сходится, а вместе с ним сходится, и притом абсолютно, ряд (1).

Если же $|z|>R$, т. е. $|z|/R>1$, то ряд (1) расходится и его общий член $|a_nz^n|$ не ограничен, поэтому общий член ряда (1) a_nz^n не стремится к нулю при $n\to\infty$ и для него не выполняется необходимый признак (см. § 11.1 (4)). Это показывает, что ряд (1) расходится.

Итак, мы доказали, что определяемое из равенства (2) число R обладает следующим свойством: если $|z|<R$, то ряд (1) сходится, если же $|z|>R$, то ряд (1) расходится.

Основная теорема доказана.

Будем в дальнейшем для краткости обозначать через σ_q замкнутый круг $|z|\leqslant q$ комплексной плоскости. Заметим, что наш степенной ряд сходится на открытом круге $|z|<R$, вообще говоря, неравномерно. Однако, верна следующая теорема:

Теорема 2. *Степенной ряд* (1) *абсолютно и равномерно сходится на любом круге* $\sigma_q=\{z\colon |z|\leqslant q\}$, *где* $q<R$, *а* R — *радиус сходимости ряда* (1).

Доказательство. В самом деле, пусть $q<R$, тогда q есть действительная, т. е. лежащая на оси x, точка, принадлежащая открытому кругу сходимости ряда (1). Поэтому в этой точке наш степенной ряд абсолютно сходится, т. е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nq^n|<\infty$. С другой стороны,

$$|a_nz^n|\leqslant|a_nq^n| \quad (n=0,1,2,\ldots), \qquad z\in\sigma_q.$$

Так как правые части этих неравенств не зависят от $z \in \sigma_q$, и ряд, составленный из правых частей, сходится, то по признаку Вейерштрасса (см. § 11.7, теорема 1) степенной ряд (1) сходится на σ_q абсолютно и равномерно.

Из теоремы 2 как следствие вытекает

Теорема 3. *Сумма*

$$s(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

степенного ряда есть непрерывная функция на его открытом круге сходимости $|z| < R$.

В самом деле, члены нашего ряда — непрерывные функции от z, а сам ряд равномерно сходится на круге σ_q, $q < R$. Следовательно, по известной теореме из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 11.7, теорема 2) сумма ряда $s(z)$ есть непрерывная функция на σ_q, но тогда и на всем круге $|z| < R$, потому что $q < R$ произвольно.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда в нашем распоряжении имеется формула (2), но часто на практике при вычислении R удобно бывает воспользоваться признаком Даламбера.

Пусть существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n|, \tag{4}$$

который мы пока обозначим через $1/R_1$. Тогда (см. (3))

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{R_1},$$

и, согласно признаку Даламбера (§ 11.3, теорема 2), если $|z| < R_1$, то ряд (1′), а вместе с ним и ряд (1), сходится, если же $|z| > R_1$, то $|u_n| \to \infty$ и ряд (1) расходится.

Но число R с такими свойствами может быть единственным, поэтому $R_1 = R$ (см. теорему 1).

Итак, мы доказали, что *если существует предел* (4), *то он равен* $1/R$:

$$\lim_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1/R, \tag{5}$$

где R — радиус сходимости степенного ряда (1).

Заметим, что мы окольным путем доказали, что если предел (4) (конечный или бесконечный) существует, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. На самом деле имеет место более сильное утверждение, которое доказано в § 11.3 (замечание 2): существование предела (4) (конечного или бесконечного) влечет за собой существование равного ему предела $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

Замечание 3. В учебной литературе (также как в первом и втором изданиях нашего курса) обычно начинают изложение степенных рядов с теоремы Абеля, которая гласит:

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке* $z_0 \neq 0$ *комплексной плоскости, то он сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге* $|z| \leqslant q$, *где* q — *любое число, удовлетворяющее неравенствам* $0 < q < |z_0|$.

Доказательство. Эта теорема теперь уже является следствием из теорем 1 и 2. В самом деле, так как z_0 есть точка сходимости ряда (1), то $|z_0|$ не может быть бо́льшим, чем R. Поэтому $|z_0| \leqslant R$, $0 < q < |z_0| \leqslant R$ и $q < R$. Но тогда по теореме 2 степенной ряд (1) сходится на круге $|z| \leqslant q$ абсолютно и равномерно.

Примеры.

$$1 + z + z^2 + \ldots, \tag{6}$$

$$1 + \frac{z}{1^\alpha} + \frac{z^2}{2^\alpha} + \ldots \quad (\alpha > 0), \tag{7}$$

$$1 + z + 2!z^2 + 3!z^3 + \ldots, \tag{8}$$

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \tag{9}$$

С помощью формулы (2) заключаем, что радиус сходимости рядов (6) и (7) равен 1; для ряда (8) он равен 0 и для ряда (9) равен ∞.

Сумма ряда (6) (геометрической прогрессии) в открытом круге $|z| < 1$ равна $(1 - z)^{-1}$, а остаток

$$r_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1 - z} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Однако сходимость на указанном круге неравномерна. Неравномерность сходимости имеет место уже для положительных $z = x$ на интервале $0 < x < 1$; неравенство

$$\varepsilon > \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

при любом заданном n нельзя удовлетворить для всех указанных x.

Ряд (7) при $\alpha > 1$ равномерно сходится на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ его сходимости, так как

$$z^k/k^\alpha \leqslant k^{-\alpha} \quad \text{и} \quad \sum k^{-\alpha} < \infty \quad (|z| \leqslant 1).$$

Если же $0 < \alpha \leqslant 1$, то в точке $z = 1$ ряд (7), очевидно, расходится. Остальные точки z с $|z| = 1$ запишем следующим образом: $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$,

$$z^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

и

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right) + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}.$$

Оба полученные ряда (по косинусам и по синусам) для $0 < \theta < 2\pi$ сходятся (см. § 11.8 пример 3). Таким образом, ряд (7) сходится во всех точках окружности $|z| = 1$, кроме $z = 1$.

Ряд (8) сходится только в точке $z = 0$, а ряд (9) схдоится во всех точках z комплексной плоскости, притом равномерно на любом круге $|z| \leqslant \leqslant q < \infty$.

§ 11.12. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 1. *Радиусы сходимости степенного ряда*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

и ряда, полученного из него формальным дифференцированием

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots, \tag{2}$$

совпадают.

Доказательство. Пусть R есть радиус сходимости ряда (1), а R_1 — радиус сходимости ряда (2). Тогда (см. § 3.7, теорема 6)

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(n+1)a_n|} = \overline{\lim} \left(\sqrt[n]{n+1},\ \sqrt[n]{|a_n|}\right) =$$
$$= \lim \sqrt[n]{n+1} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

и $R = R_1$.

Теорема 2. *Степенной ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad |z| < R \tag{3}$$

законно формально дифференцировать в пределах его (открытого) круга сходимости $|z| < R$, т. е. верна формула

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots, \qquad |z| < R. \tag{4}$$

Доказательство. Эту теорему мы докажем сначала в предположении, что $z = x$ есть действительная переменная; это даст нам возможность свести вопрос к хорошо известному факту из теории действительных рядов. Итак, степенной ряд (3) для действительной переменной $z = x$ имеет вид:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad -R < x < R. \tag{3'}$$

Этот ряд теперь уже имеет не круг, а интервал сходимости $(-R, R)$.

Соответствующий формально продифференцированный ряд имеет вид

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \tag{4'}$$

Его сумму мы пока обозначили через $\varphi(x)$. Он сходится на интервале $(-R, R)$ на основании предыдущей теоремы,