Оба полученные ряда (по косинусам и по синусам) для $0 < \theta < 2\pi$ сходятся (см. § 11.8 пример 3). Таким образом, ряд (7) сходится во всех точках окружности $|z| = 1$, кроме $z = 1$.

Ряд (8) сходится только в точке $z = 0$, а ряд (9) схдоится во всех точках z комплексной плоскости, притом равномерно на любом круге $|z| \leqslant \leqslant q < \infty$.

§ 11.12. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 1. *Радиусы сходимости степенного ряда*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

и ряда, полученного из него формальным дифференцированием

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots, \tag{2}$$

совпадают.

Доказательство. Пусть R есть радиус сходимости ряда (1), а R_1 — радиус сходимости ряда (2). Тогда (см. § 3.7, теорема 6)

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(n+1)a_n|} = \overline{\lim} \left(\sqrt[n]{n+1},\ \sqrt[n]{|a_n|}\right) =$$

$$= \lim \sqrt[n]{n+1} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

и $R = R_1$.

Теорема 2. *Степенной ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad |z| < R \tag{3}$$

законно формально дифференцировать в пределах его (открытого) круга сходимости $|z| < R$, т. е. верна формула

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots, \qquad |z| < R. \tag{4}$$

Доказательство. Эту теорему мы докажем сначала в предположении, что $z = x$ есть действительная переменная; это даст нам возможность свести вопрос к хорошо известному факту из теории действительных рядов. Итак, степенной ряд (3) для действительной переменной $z = x$ имеет вид:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad -R < x < R. \tag{3'}$$

Этот ряд теперь уже имеет не круг, а интервал сходимости $(-R, R)$.

Соответствующий формально продифференцированный ряд имеет вид

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \tag{4'}$$

Его сумму мы пока обозначили через $\varphi(x)$. Он сходится на интервале $(-R, R)$ на основании предыдущей теоремы, Оба ряда, как мы знаем, равномерно сходятся на отрезке $[-q, q]$, где $q < R$. При этом члены второго ряда непрерывны и являются производными от соответствующих членов первого. Но тогда на основании известной теоремы из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 11.8, теорема 3) выполняется равенство

$$\varphi(x) = f'(x) \tag{5}$$

на отрезке $[-q, q]$, следовательно, и на интервале $(-R, R)$, потому что $q < R$ произвольно.

Переходим к доказательству теоремы в общем случае — для комплексного z. Оно, конечно, годится и для действительных x. Пусть z — произвольная точка круга

$$|z| < R$$

и число (конечное!) R_1 удовлетворяет неравенству

$$|z| < R_1 < R.$$

Будем рассматривать только такие комплексные h, для которых

$$|h| < R_1 - |z| = \delta.$$

Тогда

$$|z + h| < R_1$$

и

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \alpha_1(h) + \alpha_2(h) + \ldots, \tag{6}$$

где

$$\alpha_n(h) = a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = a_n\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}\right)$$

$$(|h| > 0, \ n = 1, 2, \ldots).$$

Положим еще

$$\alpha_n(0) = a_n \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = n a_n z^{n-1}. \tag{7}$$

В силу этого допущения члены ряда (6) определены не только для $|h| > 0$, но и для $h = 0$, и притом они оказываются непрерывными функциями от h на круге

$$|h| \leqslant \delta.$$

Для них имеет место оценка

$$|\alpha_n(h)| \leqslant |a_n| \left(R_1^{n-1} + R_1^{n-2}R_1 + \ldots + R_1^{n-1}\right) = n\,|a_n|\,R_1^{n-1} \quad (|h| \leqslant \delta).$$

Положительные числа, стоящие в правых частях неравенства, не зависят от h, а ряд, составленный из них, сходится. Ведь R — радиус сходимости ряда (2), а $R_1 < R$. Но в таком случае по теореме Вейерштрасса ряд (6) функций, непрерывных на круге

$|h| \leqslant \delta$, равномерно сходится на этом круге. Это показывает, что сумма ряда (6) есть также непрерывная функция от h на этом круге, в частности, при $h = 0$. Но тогда существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \alpha_1(0) + \alpha_2(0) + \ldots$$

при любом способе стремления комплексных h к нулю. Таким образом, для любого z с

$$|z| < R$$

существует производная $f'(z)$ (в смысле комплексного переменного), равная

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots,$$

что доказывает теорему для комплексных z.

Отметим, что в силу теоремы 1 ряд (1) законно почленно дифференцировать сколько угодно раз. На k-м этапе мы получим равенство

$$f^{(k)}(z) = k! a_k + (k+1)k \ldots 2a_{k+1} z + \ldots,$$

справедливое для всех z с $|z| < R$. Если положить в нем $z = 0$, то получим $f^{(k)}(0) = k! a_k$ или

$$a_k = \frac{f^k(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, в частности, следует, что *разложение функции* $f(z)$ *в степенной ряд* (см. (1)) *в некотором круге* $|z| < R$ *(или в интервале* $(-R < x < R)$, *если речь идет о функции* $f(x)$ *действительного переменного* x) *единственно.*

Вопрос о почленном интегрировании степенных рядов во всей его полноте потребовал бы введения криволинейного интеграла от функции комплексной переменной. Мы ограничимся здесь рассмотрением этого вопроса только для степенных рядов

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (8)$$

от действительной переменной x $(z = x)$.

Если по-прежнему $R = 1 \Big/ \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ и $R > 0$, то для всех x, принадлежащих интервалу $(-R, R)$, называемому интервалом сходимости степенного ряда (8), этот ряд сходится, и притом абсолютно. Для всех же x с $|x| > R$ (при конечном R) общий член ряда не ограничен, и ряд расходится. Конечно, если $R = 0$, то ряд (8) имеет единственную точку сходимости $x = 0$.

Итак, пусть задан степенной ряд (8), сходящийся на интервале $-R < x < R$, где $0 < R \leqslant \infty$. Числа a_k могут быть действительными и комплексными. Зададим фиксированную точку $x_0 \in (-R, R)$ и переменную точку $x \in (-R, R)$ и подберем $q > 0$

так, чтобы $-R<-q<x_0$, $x<q<R$. Степенной ряд (8) равномерно сходится на отрезке $[-q, q]$, находящемся строго внутри интервала сходимости ряда. Но тогда его можно почленно интегрировать (§ 11.8, теорема 2) на отрезке, соединяющем x_0 с x:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x^2-x_0^2) + \frac{a_2}{3}(x^3-x_0^3) + \ldots$$

$$(-R<x, x_0<R). \tag{9}$$

В частности, при $x_0=0$ получим

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots \quad (-R<x<R). \tag{10}$$

Примеры.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \; (-1 \leqslant x \leqslant 1), \tag{11}$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2!}\frac{x^5}{2^2 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\frac{x^7}{2^3 7} + \ldots \; (-1 \leqslant x \leqslant 1). \tag{12}$$

Для $x \in (-1, 1)$ эти равенства получаются соответственно почленным интегрированием на отрезке, соединяющем 0 и x известных равенств

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots,$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2!}\frac{x^4}{2^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\frac{x^6}{2^3} + \ldots \tag{13}$$

Ряд (11) при $x=1, -1$ сходится по признаку Лейбница. Само же равенство (11) справедливо на основании доказываемой ниже второй теоремы Абеля.

Ряд (13) при $x=1, -1$ не может сходиться, иначе его сумма по второй теореме Абеля была бы непрерывной функцией на $[-1, +1]$. Все же ряд (12) при $x=1, -1$ сходится, потому что в этом случае абсолютная величина его общего члена равна (пояснения ниже)

$$|u_n| = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} = \frac{(2n-1)!!\,(2n)!!}{((2n)!!)^2(2n+1)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi}\,(2n)^{2n+(1/2)}e^{-2n}}{2^{2n}2\pi n^{2n+1}e^{-2n}(2n+1)} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{n}\,(2n+1)} \quad (n\to\infty).$$

Мы пользуемся обозначениями, которые уже употреблялись в § 9.18. В четвертом соотношении ($\approx$) применена формула Стирлинга (§ 9.18, (6)). Ряд, общий член которого равен правой части нашей цепи, сходится, но тогда сходится и ряд $\sum u_n$ (см. § 11.3, (1)).

В силу второй теоремы Абеля сходимость ряда (12) при $x=\pm 1$ влечет непрерывность на $[-1, +1]$ его суммы $S(x)$. Но имеет место равенство $S(x) = \arcsin x$ на $(-1, +1)$, а $\arcsin x$ непрерывна на $[-1, +1]$, поэтому это равенство верно и на $[-1, +1]$.

Вторая теорема Абеля. *Если степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \tag{14}$$

имеет радиус сходимости $R < \infty$ и ряд (14) сходится при $x = R$, то функция $f(x)$ непрерывна не только на интервале $(-R, R)$, но и на полуинтервале $(-R, R]$.

В самом деле, общий член ряда (14) можно записать в виде

$$a_nx^n = a_nR^n(x/R)^n,$$

где (постоянные) числа a_nR^n можно рассматривать как члены сходящегося ряда, а функции $(x/R)^n$ образуют невозрастающую на $[0, R]$ ограниченную последовательность $(1 \geqslant (x/R)^n \geqslant (x/R)^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots)$. Поэтому согласно признаку Абеля (см. § 11.7, теорема 4) ряд (14) непрерывных на отрезке $[0, R]$ функций сходится на нем равномерно, и следовательно, его сумма $f(x)$ есть непрерывная функция на $[0, R]$.

§ 11.13. Степенные ряды функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной

Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной z определяются как суммы рядов:

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \tag{2}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \tag{3}$$

Эти ряды сходятся для любого комплексного z, потому что радиус сходимости каждого из них равен ∞. Таким образом, функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ определены на всей комплексной плоскости. Для действительных

$$z = x$$

это определение приводит к известным действительным функциям e^x, $\cos x$, $\sin x$ (см. § 5.11).

Функция e^z обладает важным функциональным свойством:

$$e^{z+u} = e^z e^u \tag{4}$$

для любых комплексных z, u (см. пример в § 11.9).

Очевидно, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{5}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \tag{6}$$

для любого комплексного z.