Вторая теорема Абеля. *Если степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{14}$$

имеет радиус сходимости $R < \infty$ и ряд (14) сходится при $x = R$, то функция $f(x)$ непрерывна не только на интервале $(-R, R)$, но и на полуинтервале $(-R, R]$.

В самом деле, общий член ряда (14) можно записать в виде

$$a_n x^n = a_n R^n (x/R)^n,$$

где (постоянные) числа $a_n R^n$ можно рассматривать как члены сходящегося ряда, а функции $(x/R)^n$ образуют невозрастающую на $[0, R]$ ограниченную последовательность ($1 \geqslant (x/R)^n \geqslant (x/R)^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$). Поэтому согласно признаку Абеля (см. § 11.7, теорема 4) ряд (14) непрерывных на отрезке $[0, R]$ функций сходится на нем равномерно, и следовательно, его сумма $f(x)$ есть непрерывная функция на $[0, R]$.

§ 11.13. Степенные ряды функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной

Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной z определяются как суммы рядов:

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \tag{2}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \tag{3}$$

Эти ряды сходятся для любого комплексного z, потому что радиус сходимости каждого из них равен ∞. Таким образом, функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ определены на всей комплексной плоскости. Для действительных

$$z = x$$

это определение приводит к известным действительным функциям e^x, $\cos x$, $\sin x$ (см. § 5.11).

Функция e^z обладает важным функциональным свойством:

$$e^{z+u} = e^z e^u \tag{4}$$

для любых комплексных z, u (см. пример в § 11.9).

Очевидно, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{5}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \tag{6}$$

для любого комплексного z.

Равенства (6) называются *формулами Эйлера.* Из (6) и (4) следуют обобщения известных тригонометрических формул:

$$\sin(z+u) = \sin z \cos u + \cos z \sin u,$$

$$\cos(z+u) = \cos z \cos u - \sin z \sin u,$$

теперь уже справедливых для произвольных z и u.

Наконец, из (4) следует, что при $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{7}$$

Функция $z = \ln w$ от комплексной переменной w определяется как обратная функция к функции

$$w = e^z. \tag{8}$$

Если записать $w \neq 0$ в показательной форме

$$w = \rho e^{i\theta} \qquad (\rho = |w| > 0),$$

то равенство (8) запишется в виде

$$\rho e^{i\theta} = e^x e^{iy} \qquad (z = x + iy).$$

Поэтому

$$z = \ln w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w = \ln|w| + i \arg w + i\, 2k\pi \tag{9}$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $\ln|w|$ ($|w| > 0$) понимается в обычном смысле. Из (9) видно, что $\ln w$ ($w \neq 0$) есть многозначная функция от w вместе с $\operatorname{Arg} w$, независимо от того, будет ли w действительным или комплексным.

Например, с точки зрения этой теории (функций комплексного переменного) $\ln 1$ равен одному из чисел

$$2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

В действительном анализе для выражения $\ln 1$ выбирают среди этих чисел единственное действительное число 0.

Но мы не будем углубляться дальше в теорию функций комплексного переменного — это не наша задача. Сделаем только замечание по поводу формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad (-1 < x \leqslant 1), \tag{10}$$

которая была выведена в § 5.11 для действительных x. Если подставить в ряд в правой части (10) вместо x комплексное z с

$$|z| < 1,$$

то ряд останется сходящимся. Можно сказать, что его сумма равна $\ln(1+z)$, так как мы его определили выше, точнее, равна одной из однозначных ветвей многозначной функции

$$\ln(1+z).$$

Функции комплексного переменного, разлагающиеся в степенные ряды (ряды Тейлора), называются *аналитическими функциями*. Они изучаются в разделе математики, называемом теорией аналитических функций или теорией функций комплексного переменного.

В заключение отметим, что если в степенном ряде (по степеням u)

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots \tag{11}$$

с кругом сходимости $|u| < R$ положить $u = z - z_0$, где z_0 — фиксированное число (вообще говоря, комплексное), то получим ряд

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots, \tag{12}$$

называемый *степенным рядом по степеням* $z - z_0$. Он сходится в круге (сходимости) $|z - z_0| < R$ и расходится для z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| > R$.