Так как условие Коши сходимости рядов (1) и (5) формулируется совершенно одинаково, то они одновременно либо сходятся либо расходятся (не сходятся). Если они сходятся, то сумма ряда (5) равна

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} u_{n+k} = \lim_{m\to\infty}(S_{n+m}-S_n) = S - S_n.$$

Если члены ряда (1) неотрицательны (таким образом, действительны), то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots$, поэтому, если эта последовательность ограничена,

$$S_n \leqslant M \ (n = 1, 2, \ldots),$$

ряд сходится и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leqslant M.$$

Если же она неограничена, то ряд расходится:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty.$$

Пример 1. Ряд

$$1 + z + z^2 + \ldots \tag{6}$$

имеет (при $z \neq 1$) частичную сумму $S_n(z) = (1-z^{n+1})/(1-z)$. Если $|z| < 1$, то $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$, т. е. $z^{n+1} \to 0$ $(n\to\infty)$; если $|z| > 1$, то $|z^{n+1}| \to \infty$ и наконец, если $|z| = 1$, то ряд (6) расходится, потому что в этом случае его общий член, имеющий модуль, равный единице ($|z^{n+1}| = 1$), не стремится к нулю при $n\to\infty$.

Таким образом, ряд (6) сходится и имеет сумму, равную $(1-z)^{-1}$ на открытом круге $|z| < 1$, а для остальных точек z комплексной плоскости он расходится.

§ 11.2. Действия с рядами

Если ряды $\sum_0^\infty u_k$ *и* $\sum_0^\infty v_k$ *сходятся и* α *— число, то ряды* $\sum_0^\infty \alpha u_k$, $\sum_0^\infty (u_k \pm v_k)$ *также сходятся и*

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k, \tag{1}$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k. \tag{2}$$

Действительно,

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \alpha u_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k,$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k \pm \lim \sum_0^n v_k =$$

$$= \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k.$$

Подчеркнем, что из сходимости ряда, стоящего слева в (2), вообще не следует сходимость каждого из рядов, стоящих справа в (2). Например, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots, \tag{3}$$

сходится (все его члены равны 0), но выражение $\sum\limits_0^\infty 1 - \sum\limits_0^\infty 1$ не имеет смысла — ряды, входящие в него, расходятся.

Если ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{4}$$

сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например, так:

$$u_0 + (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \ldots,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся и притом к S, потому что его частичные суммы образуют подпоследовательность сходящейся последовательности частичных сумм ряда (4).

Наоборот, раскрывать скобки в ряду, вообще говоря, незаконно, например, после раскрытия скобок в сходящемся ряду (3) получается расходящийся ряд $1-1+1-\ldots$ Впрочем, если внутри скобок всюду стоят только неотрицательные или неположительные числа, то раскрытие в таком ряду скобок не изменяет сходимости ряда и величины его суммы.

§ 11.3. Ряды с неотрицательными членами

Теорема 1 (признаки сравнения рядов). *Пусть даны два ряда:*

$$1) \sum_0^\infty u_k, \qquad 2) \sum_0^\infty v_k$$

с неотрицательными членами

а) *Если* $u_k \leqslant v_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, *то из сходимости ряда* 2) *следует сходимость ряда* 1), *а из расходимости ряда* 1) *следует расходимость ряда* 2).