Действительно,

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \alpha u_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k,$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k \pm \lim \sum_0^n v_k =$$

$$= \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k.$$

Подчеркнем, что из сходимости ряда, стоящего слева в (2), вообще не следует сходимость каждого из рядов, стоящих справа в (2). Например, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots, \tag{3}$$

сходится (все его члены равны 0), но выражение $\sum_0^\infty 1 - \sum_0^\infty 1$ не имеет смысла — ряды, входящие в него, расходятся.

Если ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{4}$$

сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например, так:

$$u_0 + (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \ldots,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся и притом к S, потому что его частичные суммы образуют подпоследовательность сходящейся последовательности частичных сумм ряда (4).

Наоборот, раскрывать скобки в ряду, вообще говоря, незаконно, например, после раскрытия скобок в сходящемся ряду (3) получается расходящийся ряд $1-1+1-\ldots$ Впрочем, если внутри скобок всюду стоят только неотрицательные или неположительные числа, то раскрытие в таком ряду скобок не изменяет сходимости ряда и величины его суммы.

§ 11.3. Ряды с неотрицательными членами

Теорема 1 (признаки сравнения рядов). *Пусть даны два ряда:*

$$1)\ \sum_0^\infty u_k, \qquad 2)\ \sum_0^\infty v_k$$

с неотрицательными членами

а) *Если* $u_k \leqslant v_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, *то из сходимости ряда 2) следует сходимость ряда 1), а из расходимости ряда 1) следует расходимость ряда 2).*

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{v_k}=A>0, \tag{1}$$

то ряды 1) *и* 2) *одновременно сходятся или расходятся.*

Доказательство. Пусть ряд 2) сходится и S — его сумма. Тогда

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \leqslant S \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

т. е. частичные суммы ряда 1) ограничены и ряд 1) сходится. Его сумма S' удовлетворяет неравенству $S' \leqslant S$.

Пусть теперь ряд 1) расходится: тогда (см. § 11.1) его частичная сумма неограниченно возрастает вместе с n, что в силу неравенства

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

влечет также неограниченное возрастание частичных сумм ряда 2), т. е. расходимость последнего.

Пусть теперь имеет место равенство (1). Тогда на самом деле $v_k>0$, и для положительного $\varepsilon<A$ найдется N такое, что $A-\varepsilon<u_k/v_k<A+\varepsilon$ $(k>N)$, откуда

$$v_k(A-\varepsilon)<u_k<(A+\varepsilon)v_k. \tag{2}$$

Если ряд 2) сходится, то сходится также ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_k$, в силу второго неравенства (2) сходится также ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}u_k$, а вместе с ним и ряд 1). Если же ряд 2) расходится, то расходится также ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}v_k(A-\varepsilon)$, а вместе с ним ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}u_k$. Но тогда расходится также ряд (1).

Теорема доказана.

Теорема 2 (признаки Даламбера). *Пусть дан ряд*

$$\sum_0^{\infty}u_k \tag{3}$$

с положительными членами.

а) *Если*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\leqslant q<1 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

то ряд (3) *сходится; если же*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

то расходится.

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q, \tag{6}$$

то ряд (3) *при* $q < 1$ *сходится, а при* $1 < q \leqslant \infty$ *расходится, и его общий член* $u_k \to \infty$.

Доказательство. Имеем

$$u_n = u_0 \frac{u_1}{u_0} \frac{u_2}{u_1} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

поэтому из (4) следует, что

$$u_n \leqslant u_0 q^n, \quad q < 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и так как ряд $\sum\limits_1^\infty u_0 q^n$ сходится, то вместе с ним и ряд (3). Из (5) следует, что

$$u_n \geqslant u_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и так как ряд $u_0 + u_0 + \ldots$ расходится, то и ряд (3) расходится.

Если теперь выполняется свойство (6) и $q < 1$, то для положительного ε такого, что $q + \varepsilon < 1$, $u_{k+1}/u_k < q + \varepsilon < 1$ $(k \geqslant N)$, где N достаточно велико. В силу признака (4) в таком случае ряд $\sum\limits_N^\infty u_k$ сходится, а вместе с ним и ряд (3).

Если же $q > 1$, то возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $q - \varepsilon > 1$. Но $u_{k+1}/u_k > q - \varepsilon$ $(k \geqslant N)$ при достаточно большом N, поэтому для $N \leqslant n_0 < n$ получим

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} u_{n_0} > (q - \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0} \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Это показывает, что $u_n \to \infty$ и ряд (3) расходится.

Теорема 3 (признаки Коши). *Пусть дан ряд* (3) *с положительными членами.*

а) *Если*

$$\sqrt[k]{u_k} < q < 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{7}$$

то он сходится; если же

$$\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1 \qquad (k=0, 1, \ldots), \tag{8}$$

то он расходится.

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = q \qquad (0 \leqslant q \leqslant \infty), \tag{9}$$

то при $q<1$ ряд (3) сходится, а при $q>1$ расходится, и при этом $u_k \to \infty$.

в) *Если верхний предел*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} = q \qquad (0 \leqslant q \leqslant \infty), \tag{9'}$$

то ряд (3) при $q<1$ сходится, а при $q>1$ расходится и при этом общий член u_k ряда не ограничен.

Доказательство. Из неравенства (7) следует, что $u_k < q^k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, и так как в случае $q<1$ ряд $\sum\limits_0^\infty q^k$ сходится, то сходится и ряд (3). Из неравенства же (8) следует, что $u_k \geqslant 1$ $(k=1, 2, \ldots)$, и так как ряд $1+1+\ldots$ расходится, то расходится и ряд (3). Утверждение а) доказано.

Пусть $q<1$. Тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что $q<q+\varepsilon<1$. Из свойства (9) при $q<1$ следует, что

$$\sqrt[k]{u_k} < q+\varepsilon < 1 \qquad (k \geqslant N) \tag{10}$$

при достаточно большом N, откуда

$$u_k < (q+\varepsilon)^k \quad (k \geqslant N),$$

и так как ряд $\sum\limits_N^\infty (q+\varepsilon)^k$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_N^\infty u_k$, а вместе с ним ряд (3). Если же $q>1$, то можно указать q' такое, что $q>q'>1$. Тогда из свойства (9) при $q>1$ вытекает, что $u_k > (q')^k$ $(k \geqslant N)$ при достаточно большом N. Следовательно, $u_k \to \infty$ и ряд (3) расходится. Мы доказали б).

Из свойства (9′) так же, как из свойства (9) при $q<1$, вытекает (10). Далее рассуждения ведутся как при доказательстве б) при $q<1$. Если же $q>1$, то берем q' такое, что $q>q'>1$ и из (9′) заключаем, что $\sqrt[k_s]{u_{k_s}} > q'$ для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$. Но тогда

$$u_{k_s} > (q')^{k_s} \qquad (s=0, 1, 2, \ldots), \qquad u_{k_s} \to \infty \; (s\to\infty).$$

Это показывает, что ряд (3) расходится и его общий член не ограничен. Этим утверждение в) доказано.

Замечание 1. Ряд с общим членом $u_n = n^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ (см. § 9.15, (5) *)). При этом в обоих случаях

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \tag{11}$$

так же как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1. \tag{12}$$

Таким образом, существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды с признаками (11) или (12).

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ называется *гармоническим рядом.*

Замечание 2. Если для последовательности положительных чисел u_n существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q, \quad 0 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{13}$$

то отсюда автоматически вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q. \tag{14}$$

Поэтому, рассуждая теоретически, предельный признак Даламбера (т. е. (6)) ничего нового сравнительно с предельным признаком Коши (т. е. (9)) не дает. Но на практике признак Даламбера часто очень удобен.

Докажем высказанное утверждение. Пусть имеет место (13) пока для $q > 0$ конечного. Тогда для любого положительного $\varepsilon < q$ найдется такое n, что $q - \varepsilon < u_{n+k}/u_{n+k-1} < q + \varepsilon$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Но тогда

$$(q-\varepsilon)^p < \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdots \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < (q+\varepsilon)^p,$$

т. е. $(q-\varepsilon)^p < \dfrac{u_{n+p}}{u_n} < (q+\varepsilon)^p$, откуда

$$u_n^{1/(n+p)} (q-\varepsilon)^{p/(n+p)} < \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < u_n^{1/(n+p)} (q+\varepsilon)^{p/(n+p)},$$

и после перехода к пределу при $p \to \infty$ получим

$$q - \varepsilon \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{u_n} \leqslant \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} \leqslant q + \varepsilon.$$

Но $\varepsilon > 0$ произвольно мало и потому

$$q = \underline{\lim} \sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}.$$

Если $q = 0$, то в этих выкладках всюду в левых частях неравенств надо формально заменить $q - \varepsilon$ на 0, а в правых — считать $q = 0$.

*) В § 9.15 мы пользовались понятием ряда только в пределах сведений, изложенных в § 11.1.

Если же $q=\infty$, то надо всюду в правых частях неравенств заменить $q+\varepsilon$ на ∞, а в левых частях считать, что $q-\varepsilon$ есть произвольное положительное число. Далее, выражение «но $\varepsilon>0$ произвольно мало» надо заменить на «но $q-\varepsilon$ произвольно велико».

Обратное утверждение уже неверно: предел (14) может существовать, а предел (13) — нет. Например, пусть $u_n=q^{n\pm\sqrt{n}}$, где «+» ставится при n четном, а «—» — при n нечетном. Тогда $\sqrt[n]{u_n}=q^{1\pm n^{-1/2}}\to q\ (n\to\infty)$, а с другой стороны,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}q^{1+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} & \text{(при } n \text{ нечетном),}\\ q^{1-\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} & \text{(при } n \text{ четном).}\end{cases}$$

При $q\neq 1$ отношение u_{n+1}/u_n не ограничено и, таким образом, не стремится к конечному пределу.

Примеры.

$$1)\ \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!};\quad 2)\ \sum_1^\infty \frac{x^k}{k^\alpha}\ (\alpha>0);\quad 3)\ \sum_1^\infty \left(e^{1/k}-1\right);$$

$$4)\ \sum_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{k}\right);\quad 5)\ \sum_1^\infty q^{k+\sqrt{k}}\quad (q>0).$$

Ряды 1), 2), очевидно, сходятся при $x=0$. Но ряд 1) также сходится для любого $x>0$, потому что тогда $u_{k+1}/u_k=x/(k+1)\to 0$, $k\to\infty$. Ряд же 2) сходится при $0<x<1$ и расходится для $x>1$, потому что для него $u_{k+1}/u_k=x(k/(k+1))^\alpha\to x$, $k\to\infty$; при $x=1$ см. выше замечание 1. Ряды 3) и 4) расходятся, потому что $e^{1/k}-1\approx 1/k$ $(k\to\infty)$ и $\ln(1+(1/k))\approx 1/k$ $(k\to\infty)$ («$\approx$» — знак асимптотического равенства, см. § 4.10), а ряд $\sum\limits_0^\infty \frac{1}{k}$ расходится. Ряд 5) сходится при $0\leqslant q<1$ и расходится при $q>1$, потому что для него $\sqrt[k]{u_k}=q^{1+k^{-1/2}}\to q$ $(k\to\infty)$. При $q=1$ он тоже расходится — общий его член в этом случае равен 1.

Теорема 4. *Пусть ряд*

$$u_0+u_1+u_2+\ldots, \tag{15}$$

с неотрицательными членами сходится и имеет сумму S. Тогда полученный в результате произвольной перестановки его членов новый (заново перенумерованный) ряд

$$u_0'+u_1'+u_2'+u_3'+\ldots \tag{16}$$

также сходится и имеет ту же сумму S.

Доказательство. Пусть

$$S_n'=u_0'+u_1'+\ldots+u_n'$$

— частичная сумма ряда (16). Члены ее находятся в ряде (15) под некоторыми номерами $k_0,\ \ldots,\ k_n$. Пусть N — наибольшее число среди них и S_N есть N-я частичная сумма его. Очевидно,

$S'_n \leqslant S_N \leqslant S$, и так как n произвольно, то ряд (16) сходится и имеет сумму $S' \leqslant S$. Но теперь приведенное рассуждение можно провести еще раз, поменяв ряды (15) и (16) местами, и получить, что $S \leqslant S'$. Поэтому $S = S'$.

§ 11.4. Ряд Лейбница

Ряд вида

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots, \tag{1}$$

где числа $a_k > 0$, монотонно убывая, стремятся к нулю ($a_k \geqslant a_{k+1}$; $a_k \to 0$, $k \to \infty$), называется *рядом Лейбница*.

Покажем, что ряд Лейбница сходится и его сумма $S \leqslant a_0$.

В самом деле, частичная его сумма S_{2n+1} с нечетным номером $2n+1$ может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

откуда очевидно следует, что она ограничена сверху числом a_0:

$$S_{2n+1} \leqslant a_0.$$

С другой стороны, она может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

откуда следует, что она монотонно не убывает. Но в таком случае существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \leqslant a_0.$$

Очевидно также, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - a_{2n+1}) = S - 0 = S.$$

Теорема доказана.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ есть, очевидно, ряд Лейбница. Таким образом, он сходится и его сумма S не превышает 1 (на самом деле, $S = \ln 2$, см. § 5.11, (5)).

§ 11.5. Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд с комплексными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots \tag{2}$$

модулей его членов.