$S'_n \leqslant S_N \leqslant S$, и так как n произвольно, то ряд (16) сходится и имеет сумму $S' \leqslant S$. Но теперь приведенное рассуждение можно провести еще раз, поменяв ряды (15) и (16) местами, и получить, что $S \leqslant S'$. Поэтому $S = S'$.

§ 11.4. Ряд Лейбница

Ряд вида

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots, \tag{1}$$

где числа $a_k > 0$, монотонно убывая, стремятся к нулю ($a_k \geqslant a_{k+1}$; $a_k \to 0$, $k \to \infty$), называется *рядом Лейбница*.

Покажем, что ряд Лейбница сходится и его сумма $S \leqslant a_0$.

В самом деле, частичная его сумма S_{2n+1} с нечетным номером $2n+1$ может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

откуда очевидно следует, что она ограничена сверху числом a_0:

$$S_{2n+1} \leqslant a_0.$$

С другой стороны, она может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

откуда следует, что она монотонно не убывает. Но в таком случае существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \leqslant a_0.$$

Очевидно также, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - a_{2n+1}) = S - 0 = S.$$

Теорема доказана.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ есть, очевидно, ряд Лейбница. Таким образом, он сходится и его сумма S не превышает 1 (на самом деле, $S = \ln 2$, см. § 5.11, (5)).

§ 11.5. Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд с комплексными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots \tag{2}$$

модулей его членов.