$S'_n \leqslant S_N \leqslant S$, и так как n произвольно, то ряд (16) сходится и имеет сумму $S' \leqslant S$. Но теперь приведенное рассуждение можно провести еще раз, поменяв ряды (15) и (16) местами, и получить, что $S \leqslant S'$. Поэтому $S = S'$.

§ 11.4. Ряд Лейбница

Ряд вида

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots, \tag{1}$$

где числа $a_k > 0$, монотонно убывая, стремятся к нулю ($a_k \geqslant a_{k+1}$; $a_k \to 0$, $k \to \infty$), называется *рядом Лейбница*.

Покажем, что ряд Лейбница сходится и его сумма $S \leqslant a_0$.

В самом деле, частичная его сумма S_{2n+1} с нечетным номером $2n+1$ может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

откуда очевидно следует, что она ограничена сверху числом a_0:

$$S_{2n+1} \leqslant a_0.$$

С другой стороны, она может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

откуда следует, что она монотонно не убывает. Но в таком случае существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \leqslant a_0.$$

Очевидно также, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - a_{2n+1}) = S - 0 = S.$$

Теорема доказана.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ есть, очевидно, ряд Лейбница. Таким образом, он сходится и его сумма S не превышает 1 (на самом деле, $S = \ln 2$, см. § 5.11, (5)).

§ 11.5. Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд с комплексными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots \tag{2}$$

модулей его членов.

Абсолютно сходящийся ряд сходится. В самом деле, пусть ряд (1) абсолютно сходится, тогда сходится ряд (2) и в силу признака Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\varepsilon > |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|$ для всех значений p и $n > N$. Тем более, тогда $\varepsilon > |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}|$. Поэтому в силу критерия Коши ряд (1) сходится.

Сходящиеся ряды с неотрицательными членами тривиальным образом сходятся абсолютно. Ряд $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \ldots (\alpha > 0)$ сходится, потому что он есть ряд Лейбница. Однако абсолютно он сходится только при $\alpha > 1$.

Теорема 1. *Если ряд абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов абсолютная сходимость полученного нового ряда не нарушается и его сумма остается прежней.*

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае, когда члены ряда u_k действительные числа.

Положим (для действительных u_k)

$$u_k^+ = \begin{cases} u_k, & \text{если } u_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } u_k < 0, \end{cases} \quad u_k^- = \begin{cases} -u_k, & \text{если } u_k \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } u_k > 0; \end{cases} \tag{3}$$

числа u_k^+ и u_k^-, очевидно, неотрицательные и

$$u_k = u_k^+ - u_k^-. \tag{4}$$

Наряду с рядом (1) будем рассматривать два ряда,

$$\sum_0^\infty u_k^+ \text{ и } \sum_0^\infty u_k^- \tag{5}$$

(с неотрицательными членами).

Пусть ряд (1) абсолютно сходится и члены его — действительные числа u_k. Тогда ряды (5) также сходятся, потому что, очевидно, $u_k^+ \leqslant |u_k|$, $u_k^- \leqslant |u_k|$.

Пусть ряд, полученный после перестановки исходного ряда (1), имеет вид $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ Для его членов введем, как выше, числа v_k^+ и v_k^-. Тогда (пояснения ниже)

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty (u_k^+ - u_k^-) = \sum_0^\infty u_k^+ - \sum_0^\infty u_k^- =$$

$$= \sum_0^\infty v_k^+ - \sum_0^\infty v_k^- = \sum_0^\infty (v_k^+ - v_k^-) = \sum_0^\infty v_k.$$

Первое равенство в этой цепи следует из (4), второе — из § 11.2, (2), если учесть, что ряды (5) сходятся, третье следует из того, что сходящиеся ряды с неотрицательными членами перестановочны, четвертое из § 11.2, (2) и, наконец, пятое,— потому, что $v_k = v_k^+ - v_k^-$. Теорема для действительных u_k доказана.

Пусть теперь $u_k = \alpha_k + i\beta_k$ — комплексные числа, а числа v_k имеют прежний смысл. Так как $|\alpha_k| \leqslant |u_k|$, $|\beta_k| \leqslant |u_k|$, то ряды с (действительными членами) $\sum_0^\infty \alpha_k$ и $\sum_0^\infty \beta_k$ абсолютно сходятся, и члены их, как сейчас было доказано, можно переставлять, поэтому, считая, что $v_k = \gamma_k + i\delta_k$, получим

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty (\alpha_k + i\beta_k) = \sum_0^\infty \alpha_k + i\sum_0^\infty \beta_k =$$
$$= \sum_0^\infty \gamma_k + i\sum_0^\infty \delta_k = \sum_0^\infty (\gamma_k + i\delta_k) = \sum_0^\infty v_k.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть ряды* $\sum_0^\infty u_k$ *и* $\sum_0^\infty v_l$ *абсолютно сходятся и произведения* $u_k v_l$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$ *перенумерованы каким-либо способом (при помощи одного индекса) и обозначены* $w_0, w_1, w_2, \ldots$ *Тогда справедливо равенство*

$$\sum_0^\infty u_k \times \sum_0^\infty v_l = \sum_0^\infty w_k,$$

где ряд справа абсолютно сходится.

Доказательство. Положим

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=0}^n |u_k|, \quad \sigma_n = \sum_{l=0}^n v_l, \quad \tilde{\sigma}_n = \sum_{l=0}^n |v_l|.$$

Имеем (пояснения ниже)

$$\sum_0^\infty |u_k| \times \sum_0^\infty |v_l| = \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n \cdot \lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n = \lim_{n\to\infty} (\tilde{s}_n \tilde{\sigma}_n) =$$
$$= \tilde{s}_0\tilde{\sigma}_0 + (\tilde{s}_1\tilde{\sigma}_1 - \tilde{s}_0\tilde{\sigma}_0) + (\tilde{s}_2\tilde{\sigma}_2 - \tilde{s}_1\tilde{\sigma}_1) + \ldots =$$
$$= |u_0v_0| + (|u_0v_1| + |u_1v_1| + |u_1v_0|) + (|u_0v_2| +$$
$$+ |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| + |u_2v_0|) + \ldots =$$
$$= |u_0v_0| + |u_0v_1| + |u_1v_1| + |u_1v_0| + |u_0v_2| + |u_1v_2| + \ldots =$$
$$= |w_0| + |w_1| + |w_2| + \ldots \qquad (6)$$

Ряды с членами $|u_k|$, $|v_l|$ по условию сходятся и потому первое равенство (6) имеет смысл. Так как пределы $\tilde{s}_n$ и $\tilde{\sigma}_n$ (при $n \to \infty$) существуют, то существует предел $\tilde{s}_n\tilde{\sigma}_n$ и равен их произведению — это выражено вторым равенством. В третьем предел $\tilde{s}_n\tilde{\sigma}_n$ заменен на сумму соответствующего ряда, членами которого являются выражения в скобках. В четвертом равенстве эти выражения записываются через суммы произведений $|u_k v_l|$. При составлении этих сумм может помочь рис. 11.1 (в скобки попадают слагаемые $|u_k v_l|$, соответствующие целочисленным точкам (k, l), лежащим на непрерывных жирных линиях вида ABC). В пятом раскрываются скобки. В силу того, что внутри скобок стоят суммы неотрицательных слагаемых, после их раскрытия полученный ряд продолжает сходиться к той же сумме. В последнем, шестом равенстве в ряду с неотрицательными членами переставлены члены, что законно.

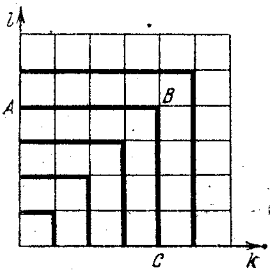

Рис. 11.1.

Подобные преобразования сделаем для исходных рядов:

$$\sum_0^\infty u_k \times \sum_0^\infty v_l = \lim_{n\to\infty} s_n \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (s_n\sigma_n) =$$
$$= s_0\sigma_0 + (s_1\sigma_1 - s_0\sigma_0) + \ldots = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0) + \ldots =$$
$$= u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + u_0v_2 + \ldots = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots \tag{6'}$$

В предпоследнем равенстве после формального раскрытия скобок получается сходящийся, даже абсолютно, ряд, как это выяснено при рассмотрении (6). В последнем равенстве переставлены члены в абсолютно сходящемся ряде, что законно.

Важный пример (пояснения ниже):

$$\sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} \times \sum_0^\infty \frac{v^l}{l!} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{v}{1} + \frac{z^2}{2!} + zv + \frac{v^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} +$$
$$+ \frac{z^2v}{2!} + \frac{zv^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \ldots = 1 + \frac{1}{1!}(z+v) + \frac{1}{2!}(z+v)^2 +$$
$$+ \frac{1}{3!}(z+v)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^\infty \frac{(z+v)^k}{k!}.$$

Перемножаемые ряды абсолютно сходятся для любых комплексных z и v, поэтому их можно (на основании теоремы 2) перемножить, как если бы это были многочлены. При этом произведения $\frac{z^k v^l}{k!l!}$ можно расположить в любом порядке, составленный из них ряд абсолютно сходится. В данном случае выгодно члены $\frac{z^k}{k!}\frac{v^l}{l!}$ сгруппировать так, чтобы в n-ю группу попали произведения, соответствующие целочисленным парам (k, l), где $k+l=n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.