§ 11.6. Условно и безусловно сходящиеся ряды с действительными членами

Пусть задан ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

с действительными членами. Определим для него, как в предыдущем параграфе, два ряда,

$$\sum_0^\infty u_k^+ \text{ и } \sum_0^\infty u_k^- \tag{2}$$

(с неотрицательными членами).

Если ряд (1) абсолютно сходится, то, как мы знаем, сходятся также ряды (2). Очевидно, и наоборот,— из сходимости двух рядов (2) следует абсолютная сходимость ряда (1), потому что

$$|u_k| = u_k^+ + u_k^-.$$

Таким образом, для того чтобы ряд (1) абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы порождаемые им ряды (2) оба сходились.

Пусть теперь ряд (1) сходится, но не абсолютно. Тогда один из рядов (2), пусть для определенности первый, расходится, т. е. $\sum_0^\infty u_k^+ = \infty$ (ведь $u_k^+ \geqslant 0$). Но

$$\sum_0^n u_k^- = \sum_0^n u_k^+ - \sum_0^n u_k. \tag{3}$$

Первая сумма в правой части (3) неограниченно возрастает вместе с n, а вторая стремится к конечному пределу, потому что ряд (1) сходится, поэтому левая часть (3) неограниченно возрастает вместе с n. Таким образом, оба ряда (2) расходятся.

Заметим еще, что из сходимости ряда (1) следует, что $u_k \to 0$, а тогда, очевидно, и $u_k^+, u_k^- \to 0$.

Мы показали, что если ряд (1) сходится, но не абсолютно, то порождаемые им ряды (2) оба расходятся, но при этом $u_k^+, u_k^- \to 0$.

Это утверждение можно еще переформулировать так:

1) *Для того чтобы ряд был абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно чтобы ряды, составленные только из положительных и только из отрицательных его членов, были сходящимися.*

Впрочем, может оказаться, что один из этих рядов на самом деле есть конечная сумма или вообще отсутствует.

2) *Если ряд сходится не абсолютно, то ряды, составленные только из положительных и только из отрицательных его членов, расходятся, а их общие члены стремятся к нулю.*

Существует следующая терминология. Говорят, что ряд сходится *безусловно*, если он сходится и любая перестановка его членов не нарушает его сходимости, и ряд сходится условно, если он сходится, но существует перестановка его членов, нарушающая его сходимость, т. е. делающая переставленный ряд расходящимся.

Из доказанной в предыдущем параграфе теоремы о перестановочности абсолютно сходящегося ряда следует, что а) *абсолютно сходящийся ряд сходится безусловно.*

Из утверждения же 2) и теоремы, которую мы доказываем ниже, следует, что б) *сходящийся не абсолютно ряд сходится условно.*

Из утверждений а) и б) тогда следует, что *для того, чтобы ряд сходился безусловно, необходимо и достаточно, чтобы он был абсолютно сходящимся.*

После сказанного самому понятию безусловной сходимости можно дать другую, эквивалентную формулировку: *сходящийся ряд называется безусловно сходящимся, если ряд, полученный после любой перестановки его членов, продолжает сходиться и имеет прежнюю сумму.*

Но перейдем к теореме, о которой шла речь.

Теорема 1 (Римана). *Пусть заданы два расходящихся ряда $\sum_0^\infty \alpha_k$ и $\sum_0^\infty \beta_k$ с положительными членами, стремящимися к нулю при $k\to\infty$ $(\alpha_k\to 0,\ \beta_k\to 0)$.*

Тогда, каково бы ни было $S\,(-\infty\leqslant S\leqslant\infty)$, можно сконструировать ряд вида

$$\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{k_1}-\beta_0-\ldots-\beta_{k_1'}+\alpha_{k_1+1}+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_{k_2}-\beta_{k_1'+1}-\ldots-\beta_{k_2'}+\alpha_{k_2+1}+\ldots,\qquad(4)$$

имеющий сумму S.

Таким образом, при $S=+\infty,\ -\infty$ он будет расходиться. В этот ряд входят все α_k и β_k, и притом по одному разу.

Доказательство. Пусть для определенности S положительное число конечное. Числа $k_1<k_2<\ldots,\ k_1'<k_2'<\ldots$ подбираются как наименьшие натуральные числа, для которых выполняются последовательно неравенства:

$$1)\ A_1=\sum_0^{k_1}\alpha_j>S,\qquad 2)\ A_2=A_1-\sum_0^{k_1'}\beta_j<S,$$

$$3)\ A_3=A_2+\sum_{k_1+1}^{k_2}\alpha_j>S,\quad 4)\ A_4=A_3-\sum_{k_1'+1}^{k_2'}\beta_j<S.$$

Возможность подобрать такие числа k_l, k_l' каждый раз следует из расходимости рядов $\sum_0^\infty \alpha_j$ и $\sum_0^\infty \beta_j$. Теперь тот факт, что ряд (4) сходится к S, следует из того, что α_k, $\beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Чтобы получить теорему при $S = \infty$, можно в правых частях неравенств 1), 2) ... поставить вместо S соответственно числа 2, 1, 4, 3, 6, 5, ...

§ 11.7. Последовательности и ряды функций. Равномерная сходимость

Рассмотрим последовательность функций $\{f_k(\mathbf{x})\}$, определенных на некотором множестве точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства. Они могут принимать комплексные значения $(f_k(\mathbf{x}) = \alpha_k(\mathbf{x}) + i\beta_k(\mathbf{x}))$. Можно считать также, что $\mathbf{x}$ — коплексные точки $(\mathbf{x} = \xi + i\eta)$, пробегающие множество E точек комплексной плоскости и тогда $f_k(x)$ — функции комплексной переменной $\mathbf{x}$.

Пусть для каждого $\mathbf{x} \in E$ последовательность $\{f_k(\mathbf{x})\}$ стремится к числу $f(\mathbf{x})$ (функции от x). Обозначим через

$$\rho_n = \sup_{x \in E} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \tag{1}$$

верхнюю грань модулей уклонений $f_n(\mathbf{x})$ от $f(\mathbf{x})$, распространенную на множество E. Будем предполагать, что ρ_n для каждого n конечно $(\rho_n < \infty)$.

Говорят, что *последовательность* $\{f_n(\mathbf{x})\}$ *равномерно сходится на* E *к* $f(\mathbf{x})$, если $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Дадим другое эквивалентное определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится к $f(\mathbf{x})$ на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \text{ для всех } \mathbf{x} \in E. \tag{2}$$

Если выполняется первое определение, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что $\rho_n < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \rho_n < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x} \in E$ и $n > N$, т. е. выполняется второе определение. Если же выполняется второе определение, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство (2). Взяв верхнюю грань его левой части по $\mathbf{x} \in E$, получим $\rho_n \leqslant \varepsilon$ $(n > N)$, откуда $\rho_n \to 0$, т. е. выполняется первое определение.

Верно также третье (эквивалентное) определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится на E к $f(x)$, если существует последовательность $\{\alpha_n\}$ положительных чисел (не зависящих от $\mathbf{x}$) такая, что $\alpha_n \to 0$ и $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ для всех $\mathbf{x} \in E$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.