Возможность подобрать такие числа k_l, k_l' каждый раз следует из расходимости рядов $\sum_0^\infty \alpha_j$ и $\sum_0^\infty \beta_j$. Теперь тот факт, что ряд (4) сходится к S, следует из того, что α_k, $\beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Чтобы получить теорему при $S = \infty$, можно в правых частях неравенств 1), 2) ... поставить вместо S соответственно числа 2, 1, 4, 3, 6, 5, ...

§ 11.7. Последовательности и ряды функций. Равномерная сходимость

Рассмотрим последовательность функций $\{f_k(\mathbf{x})\}$, определенных на некотором множестве точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства. Они могут принимать комплексные значения $(f_k(\mathbf{x}) = \alpha_k(\mathbf{x}) + i\beta_k(\mathbf{x}))$. Можно считать также, что $\mathbf{x}$ — коплексные точки $(\mathbf{x} = \xi + i\eta)$, пробегающие множество E точек комплексной плоскости и тогда $f_k(x)$ — функции комплексной переменной $\mathbf{x}$.

Пусть для каждого $\mathbf{x} \in E$ последовательность $\{f_k(\mathbf{x})\}$ стремится к числу $f(\mathbf{x})$ (функции от x). Обозначим через

$$\rho_n = \sup_{x \in E} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \tag{1}$$

верхнюю грань модулей уклонений $f_n(\mathbf{x})$ от $f(\mathbf{x})$, распространенную на множество E. Будем предполагать, что ρ_n для каждого n конечно $(\rho_n < \infty)$.

Говорят, что *последовательность* $\{f_n(\mathbf{x})\}$ *равномерно сходится на* E *к* $f(\mathbf{x})$, если $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Дадим другое эквивалентное определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится к $f(\mathbf{x})$ на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \text{ для всех } \mathbf{x} \in E. \tag{2}$$

Если выполняется первое определение, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что $\rho_n < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \rho_n < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x} \in E$ и $n > N$, т. е. выполняется второе определение. Если же выполняется второе определение, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство (2). Взяв верхнюю грань его левой части по $\mathbf{x} \in E$, получим $\rho_n \leqslant \varepsilon$ $(n > N)$, откуда $\rho_n \to 0$, т. е. выполняется первое определение.

Верно также третье (эквивалентное) определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится на E к $f(x)$, если существует последовательность $\{\alpha_n\}$ положительных чисел (не зависящих от $\mathbf{x}$) такая, что $\alpha_n \to 0$ и $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ для всех $\mathbf{x} \in E$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

В самом деле, если верно первое определение, то, положив $\alpha_n = \rho_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, получим третье определение. Обратно, из третьего определения, следует

$$\rho_n = \sup_{x \in E} \left| f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right| \leqslant \alpha_n$$

и $\rho_n \to 0$, $n \to \infty$.

Например, пусть функции $f(x)$, $f_n(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$. График функции $y = f(x)$ изображен на чертеже (рис. 11.2). Кроме того, там изображена полоска Π_ε толщиной 2ε

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

состоящая из точек (x, y), удаленных от этого графика в направлении оси y на величину меньшую, чем $\varepsilon > 0$.

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что все графики Γ_n функций f_n с $n > N$ попадут полностью в Π_ε.

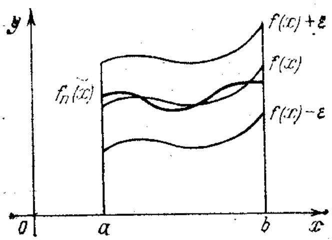

Рис. 11.2.

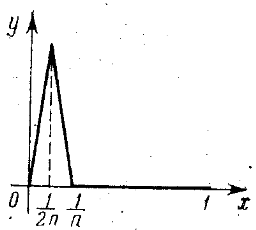

Рис. 11.3.

Но могут быть такие последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящиеся к $f(x)$ для любого $x \in [a, b]$, что для некоторых $\varepsilon > 0$ не существует такое N, чтобы графики $f_n(x)$ с $n > N$ попадали полностью в Π_ε. В этом случае мы говорим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f на $[a, b]$ неравномерно (см. далее пример 2 и рис. 11.3).

Можно еще дать четвертое определение равномерной сходимости в духе Коши: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \tag{4}$$

при любых $n > N$ и $p > 0$ и для всех $\mathbf{x} \in E$.

Из того, что последовательность равномерно сходится в смысле второго определения, следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и любых p выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant |f_{n+p}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$$

для всех $\mathbf{x} \in E$,

т. е. выполняется четвертое определение. С другой стороны, пусть выполняется четвертое определение; тогда для каждого отдельного значения $x \in E$ выполняется, очевидно, обычный признак Коши сходимости последовательности, поэтому она сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})$. Зададим теперь $\varepsilon > 0$, и подберем N так, как указано в четвертом определении. В неравенстве (4), где $n > N$ фиксировано, перейдем к пределу при $p \to \infty$; в результате получим

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon \quad (\mathbf{x} \in E),$$

откуда

$$\rho_n = \sup_{x \in E} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon,$$

и так как $n > N$ можно взять любым, то $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$, т. е. выполняется первое определение.

Нетрудно видеть, что если α — число, а $\{f_k(\mathbf{x})\}$ и $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ — две последовательности функций, равномерно сходящиеся на E, то последовательности $\{\alpha f_k(\mathbf{x})\}$ и $\{f_k(\mathbf{x}) \pm \varphi_k(\mathbf{x})\}$ также равномерно сходятся на E. Нетрудно также видеть, что если последовательность функций равномерно сходится на E, то она равномерно сходится и на $E' \subset E$. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Заметим еще, что каждой последовательности функций $\{f_n(\mathbf{x})\}$ соответствует ряд

$$f_0(\mathbf{x}) + (f_1(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})) + (f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})) + \ldots,$$

n-е частичные суммы которого соответственно равны $f_n(\mathbf{x})$.

Пусть теперь задан ряд

$$u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) + \ldots, \tag{5}$$

члены которого, вообще говоря, комплексные функции от $\mathbf{x} \in E$, где E — по-прежнему некоторое множество точек n-мерного пространства или комплексной плоскости.

По определению, *ряд* (5) *равномерно сходится на множестве E к функции $S(\mathbf{x})$*, если последовательность $\{S_k(\mathbf{x})\}$ его частичных сумм равномерно сходится на E к $S(\mathbf{x})$.

В частности, определение равномерной сходимости ряда, очевидно, можно высказать так: ряд (5) равномерно сходится на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и $p > 0$ и всякого $\mathbf{x} \in E$ выполняется неравенство $|u_{n+1}(\mathbf{x}) + \ldots + u_{n+p}(\mathbf{x})| < \varepsilon$.

Следующая теорема дает важный критерий равномерной сходимости ряда.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Если члены ряда* (5) *удовлетворяют неравенствам*

$$|u_k(\mathbf{x})| \leqslant \alpha_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

где $\mathbf{x} \in E$, а α_k — числа (не зависящие от x), и если ряд с члена-

ми α_k сходится, то ряд (5) *сходится на множестве E абсолютно и равномерно.*

В самом деле, из сходимости ряда с членами α_k и из (6) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при любых $n > N$ и $p > 0$ и произвольном $\mathbf{x} \in E$

$$\varepsilon > \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} \geqslant |u_{n+1}(\mathbf{x})| + \ldots + |u_{n+p}(\mathbf{x})| \geqslant$$
$$\geqslant |u_{n+1}(\mathbf{x}) + \ldots + u_{n+p}(\mathbf{x})|,$$

а это и значит, что ряд (5) равномерно сходится на E. Абсолютная его сходимость очевидна.

Докажем лемму, которая нам пригодится в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть комплекснозначная функция $F(\mathbf{x})$, определенная на множестве $E \subset R_n$, в точке $\mathbf{x}^0 \in E$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать окрестность $U(\mathbf{x}^0) \subset \subset E$ (например, $U(\mathbf{x}^0)$ есть пересечение E с некоторым открытым шаром $V_{\mathbf{x}^0}$ с центром в $\mathbf{x}^0$, т. е. $U(\mathbf{x}^0) = EV_{\mathbf{x}^0}$) такую, что $F(\mathbf{x})$ можно представить в виде суммы двух функций*

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}), \tag{7}$$

из которых F_1 непрерывна в $\mathbf{x}^0$ (относительно E), а F_2 удовлетворяет неравенству

$$|F_2(\mathbf{x})| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0).$$

Тогда функция F непрерывна в $\mathbf{x}^0$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем разложение (7) и окрестность $U(\mathbf{x}^0)$, как это сказано в формулировке леммы; так как функция F_1 непрерывна в $\mathbf{x}^0$, то найдется окрестность $U_1(\mathbf{x}^0)$, которую можно считать принадлежащей $U(x^0)$ $(U_1(x^0) \subset \subset U(\mathbf{x}^0))$, такая, что

$$|F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon, \quad \mathbf{x} \in U_1(\mathbf{x}^0).$$

Но тогда

$$|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}^0)| \leqslant |F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{x}^0)| + |F_2(\mathbf{x}) - F_2(\mathbf{x}^0)| \leqslant$$
$$\leqslant |F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{x}^0)| + |F_2(\mathbf{x})| + |F_2(\mathbf{x}^0)| <$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \quad x \in U_1(\mathbf{x}^0),$$

а это доказывает непрерывность F в $\mathbf{x}^0$.

Докажем вторую важную теорему.

Теорема 2. *Если последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f, и f_n непрерывны в точке $\mathbf{x}^0$ (относительно E), то f также непрерывна в $\mathbf{x}^0$.*

На языке рядов эта теорема гласит: *сумма равномерно сходящегося на E ряда функций, непрерывных в точке $\mathbf{x}^0 \in E$, есть непрерывная функция в этой точке.*

Доказательство. Функцию f представим в виде

$$f(\mathbf{x}) = f_n(\mathbf{x}) + [f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})],$$

где n — некоторое натуральное число. В силу равномерной сходимости f_n к f на E существует n такое, что

$$|f(\mathbf{x})-f_n(\mathbf{x})|<\varepsilon$$

для всех $\mathbf{x}\in E$, тем более для всех x, принадлежащих некоторой окрестности $U(\mathbf{x}^0)\subset E$ точки $\mathbf{x}^0$. При этом, по условию, f_n непрерывна в $\mathbf{x}^0$. Но тогда на основании доказанной леммы и функция f непрерывна в $\mathbf{x}^0$.

Приведем еще более тонкие признаки равномерной сходимости рядов, основанные на применении к ряду так называемого *преобразования Абеля* (аналога операции интегрирования по частям).

Рассмотрим ряд

$$\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots, \tag{8}$$

где α_k, β_k — функции от $x\in E$ (или постоянные числа).

Положим $B_k=\beta_{n+1}+\beta_{n+2}+\ldots+\beta_{n+k}$ и к усеченной сумме ряда (8) применим преобразование (Абеля):

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}\beta_{n+1}&+\ldots+\alpha_{n+p}\beta_{n+p}=\\ &=\alpha_{n+1}B_1+\alpha_{n+2}(B_2-B_1)+\ldots+\alpha_{n+p}(B_p-B_{p-1})=(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})B_1+\\ &+(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3})B_2+\ldots+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})B_{p-1}+\alpha_{n+p}B_p=\\ &=\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k}-\alpha_{n+k+1})B_k+\alpha_{n+p}B_p.\end{aligned} \tag{9}$$

Легко теперь установить следующие два критерия равномерной сходимости (в случае постоянных α_k, β_k — просто сходимости) ряда (8).

Теорема 3 (признак Дирихле равномерной сходимости ряда). *Если частные суммы ряда*

$$\beta_0+\beta_1+\beta_2+\ldots \tag{10}$$

ограничены в совокупности, а действительная функция $\alpha_k(\mathbf{x})$ *(с возрастанием k) равномерно (относительно $\mathbf{x}$) на E стремится к нулю, убывая, то ряд (8) сходится равномерно.*

В самом деле, пусть константа M превышает модули частных сумм σ_n ряда (10). Тогда при любых n и k,

$$|B_k|=|\sigma_{n+k}-\sigma_n|\leqslant|\sigma_{n+k}|+|\sigma_n|\leqslant 2M.$$

Поэтому в силу (9) и того факта, что α_s равномерно стремится к нулю, убывая, выполняется неравенство

$$\left|\sum_1^p\alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right|\leqslant 2M\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k}-\alpha_{n+k+1})+\alpha_{n+p}2M=2M\alpha_{n+1}<\varepsilon,$$

для любых $n>N$ и p и любых $\mathbf{x}\in E$, если только N достаточно велико. Следовательно, ряд (8) равномерно сходится. Последнее неравенство в этой цепи верно для всех $x \in E$ в силу равномерного стремления $\alpha_{n+1}(x)$ к нулю:

Теорема 4 (признак Абеля равномерной сходимости ряда). *Если действительные функции α_k монотонно убывают (с возрастанием k) и ограничены в совокупности, а ряд (10) равномерно сходится на E, то и ряд (8) сходится равномерно на E.*

В самом деле, пусть $M \geqslant |\alpha_k|$ $(k = 0, 1, \ldots)$ (функции α_k могут быть и отрицательными!). В силу равномерной сходимости ряда (10) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что $|B_k| < \varepsilon$ для любых $n > N$ и k. Поэтому в силу (9) и монотонности α_s для любых $n > N$ и p

$$\left|\sum_1^p \alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) + \varepsilon|\alpha_{n+p}| =$$

$$= \varepsilon(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+p}) + \varepsilon|\alpha_{n+p}| \leqslant 3\varepsilon M,$$

т. е. ряд (8) равномерно сходится.

Пример 1. Ряд

$$1 + (x-1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{11}$$

сходится на отрезке $[0, 1]$, но неравномерно. В самом деле, n-я его частичная сумма равна $S_n(x) = x^n$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1), \\ 0 & (0 \leqslant x < 1). \end{cases}$$

Поэтому $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |S(x) - S_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1)} |x^n| = 1$, и ρ_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

С другой стороны, ряд (11) равномерно сходится на любом отрезке $[0, q]$, где $0 < q < 1$, так как в этом случае

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,q]} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in[0,q]} |x^n| = q^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Сумма ряда (11) разрывна в точке $x = 1$, хотя члены ряда — непрерывные функции на $[0, 1]$. Это показывает, что сумма неравномерно сходящегося ряда непрерывных функций не обязательно есть непрерывная функция. Однако существуют неравномерно сходящиеся ряды (последовательности) непрерывных функций, сходящиеся к непрерывным же функциям, как показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть (рис. 11.3) функция

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0 \text{ и } 1/n \leqslant x \leqslant 1, \\ n & \text{при} \quad x = 1/2n \end{cases} \tag{12}$$

линейна и непрерывна на $[0, 1/2n]$ и $[1/2n, 1/n]$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

С другой стороны, сходимость на отрезке $[0, 1]$ неравномерна, потому что $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = n \to \infty$. На всяком же отрезке $[\varepsilon, 1]$ сходимость равномерна, потому что $f_n(x) \equiv 0$ на $[\varepsilon, 1]$ при $n > 1/\varepsilon$.

Пример 3. Ряды

$$\sum_1^\infty \frac{\cos kx}{k^\alpha}, \quad \sum_1^\infty \frac{\sin kx}{k^\alpha} \qquad (\alpha > 0) \tag{13}$$

при $\alpha > 1$ равномерно и абсолютно сходятся на всей действительной оси $(-\infty < x < \infty)$, потому что абсолютные величины их k-х членов не превышают $k^{-\alpha}$, а при $\alpha > 1$ ряд $\sum k^{-\alpha}$ сходится. В этом рассуждении мы применили признак Вейерштрасса. При $\alpha \leqslant 1$ он уже не применим, так как в этом случае ряд $\sum k^{-\alpha}$ расходится. Однако при $0 < \alpha \leqslant 1$ наши ряды равномерно сходятся на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, каково бы ни было положительное ε, где $0 < \varepsilon < 2\pi - \varepsilon < 2\pi$. В самом деле, частные суммы рядов

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots, \quad \sin x + \sin 2x + \ldots$$

соответственно равны (см. примеры в конце § 8.2)

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad K_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Они ограничены в совокупности на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$:

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\sin(\varepsilon/2)}, \quad |K_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

кроме того, $n^{-\alpha} \geqslant (n+1)^{-\alpha}$ и $n^{-\alpha} \to 0$, поэтому по признаку Дирихле ряды (13) равномерно сходятся на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

§ 11.8. Интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов на отрезке

Теорема 1. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность $\{f_n\}$ (комплекснозначных) непрерывных функций, сходящаяся к функции f. Если сходимость равномерна на $[a, b]$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

равномерно на $[a, b]$. В частности (при $x = b$),

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{2}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует (см. § 11.7, теорема 2), что предельная функция f непрерывна на $[a, b]$ и

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f(t)| = r_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$