Пример 3. Ряды

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha}}, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0) \tag{13}$$

при $\alpha > 1$ равномерно и абсолютно сходятся на всей действительной оси $(-\infty < x < \infty)$, потому что абсолютные величины их k-х членов не превышают $k^{-\alpha}$, а при $\alpha > 1$ ряд $\sum k^{-\alpha}$ сходится. В этом рассуждении мы применили признак Вейерштрасса. При $\alpha \leqslant 1$ он уже не применим, так как в этом случае ряд $\sum k^{-\alpha}$ расходится. Однако при $0 < \alpha \leqslant 1$ наши ряды равномерно сходятся на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, каково бы ни было положительное ε, где $0 < \varepsilon < 2\pi - \varepsilon < 2\pi$. В самом деле, частные суммы рядов

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots, \ \sin x + \sin 2x + \ldots$$

соответственно равны (см. примеры в конце § 8.2)

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad K_n(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Они ограничены в совокупности на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$:

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{2 \sin(\varepsilon/2)}, \quad |K_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

кроме того, $n^{-\alpha} \geqslant (n+1)^{-\alpha}$ и $n^{-\alpha} \to 0$, поэтому по признаку Дирихле ряды (13) равномерно сходятся на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

§ 11.8. Интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов на отрезке

Теорема 1. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность $\{f_n\}$ (комплекснозначных) непрерывных функций, сходящаяся к функции f. Если сходимость равномерна на $[a, b]$, то*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt \tag{1}$$

равномерно на $[a, b]$. В частности (при $x = b$),

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt. \tag{2}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует (см. § 11.7, теорема 2), что предельная функция f непрерывна на $[a, b]$ и

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f(t)| = r_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому

$$\left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^x \left|f_n(t) - f(t)\right| dt \leqslant \int_a^b r_n\,dt = (b-a)\,r_n,$$

где правая часть не зависит от x и стремится при $n\to\infty$ к нулю, а это доказывает теорему.

Теорема 2. *Равномерно сходящийся на отрезке* $[a, b]$ *ряд (комплекснозначных) непрерывных функций*

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots \tag{3}$$

можно почленно интегрировать $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$:

$$\int_{x_0}^x S(t)\,dt = \int_{x_0}^x u_0(t)\,dt + \int_{x_0}^x u_1(t)\,dt + \ldots \tag{4}$$

Полученный при этом ряд (4) *равномерно сходится на* $[a, b]$. *В частности*,

$$\int_a^b S(t)\,dt = \int_a^b u_0(t)\,dt + \int_a^b u_1(t)\,dt + \ldots \tag{5}$$

Доказательство. По условию сумма

$$S_n(x) = \sum_0^n u_k(x)$$

равномерно сходится к $S(x)$ на $[a, b]$. Поэтому на основании теоремы 1 выполняется равенство

$$\int_{x_0}^x S(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x S_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \int_{x_0}^x u_k(t)dt$$

равномерно относительно $x \in [a, b]$. Это показывает, что ряд (4) сходится равномерно относительно $x \in [a, b]$.

Теорема 3. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана последовательность (комплекснозначных) функций* $\{f_n\}$, *имеющих непрерывную производную. Если она сходится в точке* $x_0 \in [a, b]$ *и, кроме того, соответствующая последовательность производных* $\{f_n'\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[a, b]$ *к функции* φ, *то последовательность* $\{f_n\}$ *тоже сходится равномерно на этом отрезке к некоторой функции* f *и*

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a, b]. \tag{6}$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, x \in [a, b]), \tag{7}$$

потому что функции f_n непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$.

По условию существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A,$$

который мы обозначаем через A. Так как $f_n'(t) \to \varphi(t)$ при $n\to\infty$ равномерно на $[a, b]$ и функции $f_n'(t)$ непрерывны, то и $\varphi(t)$ непрерывна на $[a, b]$ (см. § 11.7, теорему 2) и, кроме того, (см. теорему 1)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt$$

равномерно на $[a, b]$. Но тогда правая часть (7) при $n\to\infty$ равномерно на $[a, b]$ стремится к некоторой функции $f(x)$, определяемой равенством

$$f(x) = A + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad x \in [a, b]. \tag{8}$$

Таким образом, $f_n(x) \to f(x)$ при $n\to\infty$ равномерно на $[a, b]$. Если учесть, что $\varphi(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то из равенства (8) следует, что (см. § 9.9 (2)) $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$, равную $\varphi(x)$, т. е. выполняется равенство (6).

Теорема доказана.

Отметим следствие из теоремы 3.

Следствие. *Если функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots, n$, и выполняются свойства $f_n(x) \to f(x)$, $f_n'(x) \to \varphi(x)$, $n\to\infty$, равномерно на $[a, b]$, то*

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

На языке рядов теорема 3 имеет следующий аналог:

Теорема 3′. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задан ряд*

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots \tag{9}$$

(комплекснозначных) функций, имеющих непрерывную производную.

Если ряд (9) сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ и, кроме того, формально продифференцированный ряд

$$u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots \tag{10}$$

равномерно сходится на $[a, b]$, то ряд (9) равномерно сходится на $[a, b]$, и производная от его суммы $S(x)$ есть сумма ряда (10).

Таким образом,

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots, \tag{11}$$

$$S'(x) = u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $u_0(x)+\ldots+u_n(x)=S_n(x)$, тогда

$$u_0'(x)+\ldots+u_n'(x)=S_n'(x).$$

На языке сумм S_n и S_n' условие теоремы 3′ гласит: существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$, и последовательность непрерывных производных $\{S_n'(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Но тогда по теореме 3 последовательность $\{S_n(x)\}$, а вместе с ней ряд (11) сходится равномерно на этом отрезке к некоторой дифференцируемой функции $S(x)$ и производная $S'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n'(x)$, т. е. $S'(x)$, есть сумма ряда (12).

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\Lambda_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha}\quad (k=1, 2, \ldots). \tag{13}$$

При α четном это ряд вида

$$\text{а)}\quad \pm\sum_1^\infty \frac{\cos kx}{k^\alpha},$$

а при α нечетном — вида

$$\text{б)}\quad \pm\sum_1^\infty \frac{\sin kx}{k^\alpha}.$$

Так как $\frac{d}{dx}\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)=-k\cos\left(kx+(\alpha-1)\frac{\pi}{2}\right)$, то формально

$$\frac{d}{dx}\Lambda_\alpha(x)=-\Lambda_{\alpha-1}(x). \tag{14}$$

Но это равенство верно и по существу при $\alpha=3, 4, \ldots$ для любого действительного x, а при $\alpha=2$ — при любом действительном

$$x\neq 2k\pi\quad (k=0, \pm1, \pm2, \ldots), \tag{15}$$

что следует из теоремы 3 и разобранных в примере 3 § 11.7 свойств рядов а), б). При доказательстве равенства (14) при $\alpha=2$ для какого-либо фиксированного x, удовлетворяющего неравенствам (15), берем отрезок $[a, b]$, содержащий строго внутри точку x, но не содержащий точки вида $2k\pi$ ($k=0, \pm1, \ldots$). На $[a, b]$ оба ряда (13) при $\alpha=1, 2$ сходятся равномерно, что дает возможность применить теорему 3.

Пример 2. Пусть функция

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \left(x=0,\ \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\right),\\ \alpha_n & \left(x=\frac{1}{2n}\right)\end{cases} \tag{16}$$

— линейная и непрерывная на $[0, 1/2n]$ и $[1/2n, 1/n]$, где a_n — любая последовательность чисел. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ для всех

$x \in [0, 1]$, а

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/2n} 2n\alpha_n x\,dx - \int_{1/2n}^{1/n} 2n\alpha_n\left(\frac{1}{n} - x\right)dx = \frac{\alpha_n}{2n}.$$

Очевидно, далее, что

$$r_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - 0| = \alpha_n.$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\alpha_n \to 0$. Равенство

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (f(x) \equiv 0) \tag{17}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\dfrac{\alpha_n}{2n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Мы видим, что из равномерной сходимости f_n к $f = 0$ на $[0, 1]$ следует сходимость интегралов (17), что согласуется с теоремой 2. Но последовательность $\{f_n\}$ может сходиться неравномерно, в то время как свойство (17) все же соблюдается, например, при $\alpha_n = 1$. Но уже, например, при $\alpha_n = n$ последовательность $\{f_n\}$ не только сходится к нулю неравномерно, но и свойство (17) не соблюдается.

Пример 3. Из равенства $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \ldots$ $(z = \rho e^{i\theta},\ \rho < 1)$ следует, что

$$\frac{1 + \rho e^{i\theta}}{2\left(1 - \rho e^{i\theta}\right)} = \frac{1}{2} + \rho e^{i\theta} + \rho^2 e^{i2\theta} + \ldots,$$

и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$P_\rho(\theta) = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} = \frac{1}{2} + \rho\cos\theta + \rho^2\cos 2\theta + \ldots,$$

$$Q_\rho(\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} = \rho\sin\theta + \rho^2\sin 2\theta + \ldots$$

Функция $P_\rho(\theta)$ называется *ядром Пуассона*, а $Q_\rho(\theta)$ — *ему сопряженной функцией*.

Упражнение. Показать, что $P_\rho(\theta)$ и $Q_\rho(\theta)$ — гармонические функции (для $\rho < 1$), т. е. удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа ($\Delta u = 0$; см. § 7.26, (15) и (17)). Для этого проверить, что $\rho^n \cos n\theta$ при любых n и $\rho \geqslant 0$ — гармоническая функция и применить теорему о почленном дифференцировании равномерно сходящихся рядов (то же для $\rho^n \sin n\theta$).

Пример 4. Будем исходить из равенства

$$\frac{1}{1 - x} = 1 - x + x^3 - \ldots \qquad (-1 < x < 1), \tag{18}$$

где ряд справа есть сумма убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $(-x)$.

На основании теоремы Вейерштрасса ряд (18) равномерно сходится на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, потому что на этом отрезке

$$\left|(-1)^k x^k\right| \leqslant q \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty.$$

Поэтому в силу теоремы 2 ряд (18) законно проинтегрировать на $[0, x]$, где $x \in [-q, q]$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{19}$$

Так как положительное число $q < 1$ произвольно, то равенство (19) справедливо для всех $x \in (-1, 1)$.

При $x = -1$ обе части (19) не имеют смысла. Однако при $x = 1$ они имеют смысл: левая часть равна $\ln 2$, а правая есть сумма сходящегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ Возникает вопрос, верно ли равенство

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

и, таким образом, верно ли равенство (19) не только на интервале $(-1, +1)$, но и на полуинтервале $(-1, +1]$.

Покажем, что это так. Ряд (19) на самом деле равномерно сходится на всем отрезке $[0, 1]$. Это следует из признака равномерной сходимости Абеля (см. теорему 4, § 11.7).

Действительно, общий член ряда (19) можно записать в виде

$$(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \alpha_k\beta_k, \quad \alpha_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \beta_k = x^k \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

При этом числовой ряд $\sum \alpha_k$ сходится. Но его можно рассматривать как равномерно сходящийся ряд постоянных функций. С другой стороны, функции $\beta_k = x^k$ ограничены ($|x^k| \leqslant 1$, $x \in [0, 1]$) и образуют при возрастании k монотонную последовательность.

Итак, ряд (19) равномерно сходится на $[0, 1]$. Его члены непрерывные функции, поэтому его сумма есть некоторая непрерывная на $[0, 1]$ функция, которую мы обозначим через $\psi(x)$.

Возникла следующая ситуация. Функция $\psi(x)$ и $\ln(1+x)$ непрерывны на $[0, 1]$ и совпадают на $[0, 1]$. Тогда, очевидно, они совпадают при $x = 1$ тоже, т. е. $\ln 2 = \psi(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$.

Другое доказательство этих фактов было дано в §§ 5.10, 5.11.

§ 11.9. Кратные ряды. Перемножение абсолютно сходящихся рядов

Выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}, \tag{1}$$

где a_{kl} — числа (действительные или комплексные), зависящие от пар индексов $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, называется *двойным* или *двукратным рядом*. Числа a_{kl} называются *членами*, а числа

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

— *частичными суммами ряда* (1).