Поэтому в силу теоремы 2 ряд (18) законно проинтегрировать на $[0, x]$, где $x \in [-q, q]$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{19}$$

Так как положительное число $q < 1$ произвольно, то равенство (19) справедливо для всех $x \in (-1, 1)$.

При $x = -1$ обе части (19) не имеют смысла. Однако при $x = 1$ они имеют смысл: левая часть равна $\ln 2$, а правая есть сумма сходящегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ Возникает вопрос, верно ли равенство

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

и, таким образом, верно ли равенство (19) не только на интервале $(-1, +1)$, но и на полуинтервале $(-1, +1]$.

Покажем, что это так. Ряд (19) на самом деле равномерно сходится на всем отрезке $[0, 1]$. Это следует из признака равномерной сходимости Абеля (см. теорему 4, § 11.7).

Действительно, общий член ряда (19) можно записать в виде

$$(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \alpha_k\beta_k, \quad \alpha_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \beta_k = x^k \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

При этом числовой ряд $\sum \alpha_k$ сходится. Но его можно рассматривать как равномерно сходящийся ряд постоянных функций. С другой стороны, функции $\beta_k = x^k$ ограничены ($|x^k| \leqslant 1$, $x \in [0, 1]$) и образуют при возрастании k монотонную последовательность.

Итак, ряд (19) равномерно сходится на $[0, 1]$. Его члены непрерывные функции, поэтому его сумма есть некоторая непрерывная на $[0, 1]$ функция, которую мы обозначим через $\psi(x)$.

Возникла следующая ситуация. Функция $\psi(x)$ и $\ln(1+x)$ непрерывны на $[0, 1]$ и совпадают на $[0, 1)$. Тогда, очевидно, они совпадают при $x = 1$ тоже, т. е. $\ln 2 = \psi(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$.

Другое доказательство этих фактов было дано в §§ 5.10, 5.11.

§ 11.9. Кратные ряды. Перемножение абсолютно сходящихся рядов

Выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}, \tag{1}$$

где a_{kl} — числа (действительные или комплексные), зависящие от пар индексов $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, называется *двойным* или *двукратным рядом*. Числа a_{kl} называются *членами*, а числа

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

— *частичными суммами ряда* (1).

По определению, ряд (1) сходится к числу S, называемому *суммой ряда* (1), если существует

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S, \tag{3}$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$|S - S_{mn}| < \varepsilon$$

для всех m, $n > N$. В этом случае пишут

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}.$$

Остановимся на случае, когда члены ряда (1) неотрицательны ($a_{kl} \geqslant 0$). Положим

$$\Lambda = \sup_{m,n} S_{mn}. \tag{4}$$

Если $\Lambda < \infty$ — конечное число, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара m_0, n_0 такая, что $\Lambda - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leqslant \Lambda$, а вследствие неотрицательности a_{kl}

$$S_{m_0 n_0} \leqslant S_{mn}, \quad m, n > N = \max(m_0, n_0).$$

Поэтому $\Lambda - \varepsilon < S_{mn} < \Lambda + \varepsilon$, m, $n > N$, и существует предел $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = S = \Lambda$.

Если же $\Lambda = \infty$, то, очевидно (при $a_{kl} \geqslant 0$!), $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = S = \infty$. В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \infty.$$

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{\infty} |a_{kl}|$. Как и в случае обычных рядов, доказывается (прибегая к условию Коши), что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Наряду с рядом (1) можно рассматривать еще выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right),$$

которому естественно приписать число A (если только оно существует), получаемое следующим образом: если для каждого $k = 0, 1, \ldots$ ряд, заключенный в скобки, сходится и имеет сумму A_k и ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} A_k$ сходится к числу A, то полагаем

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right). \tag{5}$$

Теорема 1. *Если ряд (1) абсолютно сходится, то имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{6}$$

Доказательство. Допустим сначала, что a_{kl} неотрицательны. Пусть левая часть (6) (имеющая смысл!) равна числу S.

Для любых неотрицательных s и n при $s \leqslant m$

$$\sum_{l=0}^{n} a_{sl} \leqslant \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant S, \tag{7}$$

откуда ряды $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{sl}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ сходятся; поэтому, если во втором неравенстве зафиксировать m и перейти к пределу при $n \to \infty$, получим, что

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) \leqslant S$$

для любого m, откуда следует существование числа A (см. (5)) и тот факт, что $A \leqslant S$.

С другой стороны, если число A конечно, то при любых m, n

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) \leqslant A,$$

и потому

$$S = \sup_{m,n} S_{mn} \leqslant A.$$

Равенство (6) при $a_{kl} \geqslant 0$ доказано.

Пусть теперь a_{kl} действительны. Положим

$$a_{kl}^{+} = \begin{cases} a_{kl} & (a_{kl} \geqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} < 0), \end{cases} \qquad a_{kl}^{-} = \begin{cases} -a_{kl} & (a_{kl} \leqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} > 0). \end{cases}$$

Тогда

$$a_{kl} = a_{kl}^{+} - a_{kl}^{-}, \quad a_{kl}^{+} + a_{kl}^{-} = |a_{kl}|.$$

Поэтому из сходимости ряда $\sum\sum |a_{kl}|$ следует сходимость рядов $\sum\sum a_{kl}^{+}$, $\sum\sum a_{kl}^{-}$ с неотрицательными членами и потому

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum a_{kl}^{+} - \sum\sum a_{kl}^{-} =$$
$$= \sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}^{+}\right) - \sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}^{-}\right) = \sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}\right).$$

Наконец, если $a_{kl} = \alpha_{kl} + i\beta_{kl}$ — комплексные числа и ряд $\sum\sum |a_{kl}|$ сходится, то сходятся также ряды $\sum\sum |\alpha_{kl}|$, $\sum\sum |\beta_{kl}|$, где α_{kl} и β_{kl} — действительные числа, поэтому

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum \alpha_{kl} + i\sum\sum \beta_{kl} = \\ = \sum_k\Big(\sum_l \alpha_{kl}\Big) + i\sum_k\Big(\sum_l \beta_{kl}\Big) = \sum_k\Big(\sum_l a_{kl}\Big).$$

Теорема доказана полностью.

Рассмотрим еще новый вопрос. Пусть задан двойной ряд (1), сходящийся и притом абсолютно. Его сумму S, так же как сумму S' ряда, составленного из абсолютных величин его членов, можно записать в виде пределов последовательностей

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_0^n\sum_0^n a_{kl} = \lim_{n\to\infty} S_{nn}, \quad S' = \lim_{n\to\infty}\sum_0^n\sum_0^n |a_{kl}| = \lim_{n\to\infty} S'_{nn},$$

обычных, зависящих только от одного индекса n. Последовательностям $\{S_{nn}\}$, $\{S'_{nn}\}$ соответствуют сходящиеся ряды

$$S = a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) + \\ + (a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{12} + a_{02}) + (a_{30} + \ldots) + \ldots, \tag{8}$$

$$|a_{00}| + (|a_{10}| + |a_{11}| + |a_{01}|) + \\ + (|a_{20}| + |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{12}| + |a_{02}|) + \ldots \tag{9}$$

с членами, равными суммам чисел, стоящих в скобках. Но в скобках второго ряда стоят неотрицательные числа, поэтому сходимость его не изменится, если в нем скобки вычеркнуть:

$$|a_{00}| + |a_{10}| + |a_{01}| + |a_{20}| + \ldots \tag{10}$$

Но тогда ряд

$$a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{20} + \ldots, \tag{11}$$

полученный вычеркиванием в (8) всех скобок, абсолютно сходится, следовательно, сходится, очевидно к S.

Мы доказали, что если двойной ряд (1) сходится к числу S и притом абсолютно, то полученный из него обычный (однократный) ряд (11) сходится тоже к S и тоже абсолютно. Но члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять как угодно, не нарушая его сходимости и не изменяя суммы.

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Если члены двойного ряда* (1), *сходящегося к числу S и притом абсолютно, перенумеровать любым способом* ($v_0, v_1, v_2, \ldots$) *при помощи одного индекса, и составить ряд* $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$, *то последний будет сходиться к тому же числу* S (*абсолютно*).

В заключение заметим, что можно рассматривать трех-, четырех- и вообще n-кратные ряды

$$\sum_{k=0}^\infty\sum_{l=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty a_{klm}, \ldots, \sum_{k_1=0}^\infty \ldots \sum_{k_n=0}^\infty a_{k_1, \ldots, k_n}.$$

Для них могут быть доказаны по аналогии теоремы, аналогичные теоремам 1—3.