

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию . . . . .	8
Предисловие ко второму изданию . . . . .	11
Предисловие к третьему изданию . . . . .	12
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>13</b>
§ 1.1. Вступление . . . . .	13
§ 1.2. Множество. Интервал, отрезок . . . . .	13
§ 1.3. Функция . . . . .	16
§ 1.4. Понятие непрерывности функции . . . . .	27
§ 1.5. Производная . . . . .	30
§ 1.6. Первообразная. Неопределенный интеграл . . . . .	36
§ 1.7. Понятие определенного интеграла. Площадь криволинейной фигуры . . . . .	38
<b>Глава 2. Действительное число . . . . .</b>	<b>43</b>
§ 2.1. Рациональные и иррациональные числа . . . . .	43
§ 2.2. Определение неравенства . . . . .	48
§ 2.3. Определение арифметических действий . . . . .	49
§ 2.4. Основные свойства действительных чисел . . . . .	52
§ 2.5. Изоморфизм различных представлений действительных чисел. Длина отрезка, физические величины . . . . .	55
§ 2.6. Дополнение . . . . .	61
§ 2.7. Неравенства для абсолютных величин . . . . .	63
§ 2.8. Точные верхняя и нижняя грани множества . . . . .	64
<b>Глава 3. Предел последовательности . . . . .</b>	<b>66</b>
§ 3.1. Понятие предела последовательности . . . . .	66
§ 3.2. Арифметические действия с пределами . . . . .	70
§ 3.3. Бесконечно малая и бесконечно большая величины . . . . .	72
§ 3.4. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности . . . . .	74
§ 3.5. Число $e$ . . . . .	76
§ 3.6. Леммы о вложенных отрезках, существовании точных границ множества и сечения во множестве действительных чисел . . . . .	77
§ 3.7. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы . . . . .	79
§ 3.8. Критерий Коши существования предела . . . . .	86
§ 3.9. Теорема Вейерштрасса . . . . .	88
§ 3.10. Счетное множество. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных чисел . . . . .	89

Глава 4. Предел функции . . . . .	92
§ 4.1. Понятие предела функции . . . . .	100
§ 4.2. Непрерывность функции в точке . . . . .	105
§ 4.3. Пределы функции справа и слева. Монотонная функция	
§ 4.4. Функции, непрерывные на отрезке . . . . .	109
§ 4.5. Обратная функция . . . . .	113
§ 4.6. Показательная и логарифмическая функции . . . . .	116
§ 4.7. Степенная функция $x^b$ . . . . .	120
§ 4.8. Еще о числе $e$ . . . . .	121
§ 4.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ . . . . .	122
§ 4.10. Порядок переменной, эквивалентность (асимптотика)	123
Глава 5. Дифференциальное исчисление для функций одной переменной . . . . .	127
§ 5.1. Производная . . . . .	127
§ 5.2. Дифференциал функции . . . . .	131
§ 5.3. Производная функции от функции . . . . .	133
§ 5.4. Производная обратной функции . . . . .	135
§ 5.5. Таблица производных простейших элементарных функций	138
§ 5.6. Производные и дифференциалы высшего порядка . . . . .	139
§ 5.7. Возрастание и убывание функции на интервале и в точке. Локальный экстремум . . . . .	143
§ 5.8. Теоремы о среднем значении. Критерии возрастания и убывания функции на интервале. Достаточные критерии локальных экстремумов . . . . .	145
§ 5.9. Формула Тейлора . . . . .	150
§ 5.10. Формулы Тейлора для важнейших элементарных функций	158
§ 5.11. Ряд Тейлора . . . . .	162
§ 5.12. Выпуклость кривой в точке. Точка перегиба . . . . .	166
§ 5.13. Выпуклость кривой на отрезке . . . . .	168
§ 5.14. Раскрытие неопределенностей . . . . .	169
§ 5.15. Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функции . . . . .	174
Глава 6. $n$ -мерное пространство. Геометрия кривой . . . . .	177
§ 6.1. $n$ -мерное пространство. Линейное множество . . . . .	177
§ 6.2. Евклидово $n$ -мерное пространство. Пространство со скалярным произведением . . . . .	178
§ 6.3. Линейное нормированное пространство . . . . .	181
§ 6.4. Вектор-функция в $n$ -мерном евклидовом пространстве . . . . .	182
§ 6.5. Кривая в $n$ -мерном пространстве . . . . .	185
§ 6.6. Геометрический смысл производной вектор-функции . . . . .	191
§ 6.7. Длина дуги кривой . . . . .	192
§ 6.8. Касательная. Нормаль к плоской кривой . . . . .	194
§ 6.9. Кривизна и радиус кривизны кривой. Плоская кривая. Эволюта и эвольвента . . . . .	196
§ 6.10. Соприкасающаяся плоскость и подвижный триэдр кривой	202

§ 6.11. Асимптота . . . . .	207
§ 6.12. Замена переменных . . . . .	209
<b>Глава 7. Дифференциальное исчисление функций многих переменных</b>	<b>211</b>
§ 7.1. Открытое множество . . . . .	211
§ 7.2. Предел функции . . . . .	214
§ 7.3. Непрерывная функция . . . . .	217
§ 7.4. Частные производные и производная по направлению	221
§ 7.5. Дифференцируемая функция. Касательная плоскость	223
§ 7.6. Производная сложной функции; производная по направлению; градиент . . . . .	227
§ 7.7. Независимость от порядка дифференцирования . . . . .	233
§ 7.8. Дифференциал функции. Дифференциал высшего порядка	235
§ 7.9. Предельная точка. Теорема Вейерштрасса. Замкнутые и открытые множества . . . . .	239
§ 7.10. Функции на множестве. Свойства непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве . . . . .	245
§ 7.11. Продолжение равномерно непрерывной функции. Частная производная на границе области . . . . .	250
§ 7.12. Лемма о вложенных прямоугольниках и лемма Бореля	251
§ 7.13. Формула Тейлора . . . . .	252
§ 7.14. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Единственность . . . . .	257
§ 7.15. Локальный (абсолютный) экстремум функции . . . . .	258
§ 7.16. Теоремы существования неявной функции . . . . .	262
§ 7.17. Теорема существования решения системы уравнений . . . . .	267
§ 7.18. Отображения . . . . .	272
§ 7.19. Гладкая поверхность . . . . .	275
§ 7.20. Гладкая поверхность, заданная параметрически. Ориентируемая поверхность . . . . .	279
§ 7.21. Пример неориентируемой поверхности. Лист Мёбиуса	284
§ 7.22. Локальный относительный экстремум . . . . .	285
§ 7.23. Особые точки кривой . . . . .	292
§ 7.24. Кривые на поверхности . . . . .	296
§ 7.25. Криволинейные координаты в окрестности гладкой границы области . . . . .	302
§ 7.26. Замена переменных в частных производных . . . . .	304
§ 7.27. Система зависимых функций . . . . .	308
<b>Глава 8. Неопределенные интегралы. Алгебра многочленов</b>	<b>312</b>
§ 8.1. Введение. Методы замены переменной и интегрирования по частям . . . . .	312
§ 8.2. Комплексные числа . . . . .	318
§ 8.3. Предел последовательности комплексных чисел. Функция комплексного переменного . . . . .	322
§ 8.4. Многочлены . . . . .	326
§ 8.5. Разложение рациональной функции на простейшие дроби	330

§ 8.6. Интегрирование рациональных дробей . . . . .	336
§ 8.7. Метод Остроградского выделения рациональной части из интеграла . . . . .	336
§ 8.8. Интегрирование алгебраических иррациональностей . . . . .	349
§ 8.9. Подстановки Эйлера . . . . .	341
§ 8.10. Биномиальные дифференциалы. Теорема Чебышева . . . . .	343
§ 8.11. Интегрирование тригонометрических выражений . . . . .	344
§ 8.12. Тригонометрические подстановки . . . . .	348
§ 8.13. Несколько важных интегралов, не выражаемых в элементарных функциях . . . . .	348
<b>Глава 9. Определенный интеграл Римана . . . . .</b>	<b>350</b>
§ 9.1. Вводная часть и определение . . . . .	350
§ 9.2. Ограниченность интегрируемой функции . . . . .	351
§ 9.3. Суммы Дарбу . . . . .	352
§ 9.4. Основная теорема . . . . .	354
§ 9.5. Теоремы о существовании интеграла от непрерывной и монотонной функции на $[a, b]$ . . . . .	357
§ 9.6. Теорема Лебега . . . . .	358
§ 9.7. Аддитивные и однородные свойства интеграла . . . . .	360
§ 9.8. Неравенства и теорема о среднем . . . . .	362
§ 9.9. Интеграл как функция верхнего предела. Теорема Ньютона — Лейбница . . . . .	364
§ 9.10. Вторая теорема о среднем . . . . .	368
§ 9.11. Видоизменение функции . . . . .	369
§ 9.12. Несобственные интегралы . . . . .	371
§ 9.13. Несобственные интегралы от неотрицательных функций . . . . .	375
§ 9.14. Интегрирование по частям . . . . .	378
§ 9.15. Несобственный интеграл и ряд . . . . .	380
§ 9.16. Несобственные интегралы с особенностями в нескольких точках . . . . .	384
§ 9.17. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме . . . . .	388
§ 9.18. Формулы Валлиса и Стирлинга . . . . .	389
<b>Глава 10. Некоторые приложения интегралов. Приближенные методы . . . . .</b>	<b>393</b>
§ 10.1. Площадь в полярных координатах . . . . .	393
§ 10.2. Объем тела вращения . . . . .	394
§ 10.3. Длина дуги гладкой кривой . . . . .	395
§ 10.4. Площадь поверхности тела вращения . . . . .	397
§ 10.5. Интерполяционный многочлен Лагранжа . . . . .	398
§ 10.6. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций . . . . .	399
§ 10.7. Общая квадратурная формула. Функционал . . . . .	401
§ 10.8. Формула Симпсона . . . . .	402
§ 10.9. Общий метод получения оценок квадратурных формул . . . . .	403
§ 10.10. Еще о длине дуги . . . . .	409
§ 10.11. Число $\pi$ . Тригонометрические функции . . . . .	409

<b>Глава 11. Ряды</b> . . . . .	413
§ 11.1. Понятие ряда . . . . .	413
§ 11.2. Действия с рядами . . . . .	414
§ 11.3. Ряды с неотрицательными членами . . . . .	415
§ 11.4. Ряд Лейбница . . . . .	421
§ 11.5. Абсолютно сходящиеся ряды . . . . .	421
§ 11.6. Условно и безусловно сходящиеся ряды с действительными членами . . . . .	425
§ 11.7. Последовательность и ряды функций. Равномерная сходимость . . . . .	427
§ 11.8. Интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов на отрезке . . . . .	433
§ 11.9. Кратные ряды. Перемножение абсолютно сходящихся рядов . . . . .	438
§ 11.10. Суммирование рядов и последовательностей методом средних арифметических . . . . .	442
§ 11.11. Степенные ряды . . . . .	443
§ 11.12. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов . . . . .	447
§ 11.13. Степенные ряды функций $e^z$ , $\cos z$ , $\sin z$ комплексной переменной . . . . .	451
<b>Дополнение. Приближенное вычисление элементарных функций</b>	454
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	460