Глава 12

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 12.1. Введение

Пусть в трехмерном пространстве, в котором определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана непрерывная поверхность

$$z = f(Q) = f(x, y) \qquad (Q = (x, y) \in \Omega),$$

где Ω есть некоторое ограниченное (двумерное) множество, для которого возможно определить понятие его площади (двумерной меры *)). В качестве Ω может быть взят круг, прямоугольник, эллипс и т. д. Будем считать, что функция $f(x, y)$ положительна, и поставим задачу: требуется определить объем тела, ограниченного сверху нашей поверхностью, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью, проходящей через границу γ плоского множества Ω, с образующей, параллельной оси z.

Искомый объем естественно определить следующим образом. Разделим Ω на конечное число частей

$$\Omega_1, \ldots, \Omega_N, \tag{1}$$

перекрывающихся между собой разве что по своим границам. Однако эти части должны быть такими, чтобы можно было определить их площади (двумерные меры), которые мы обозначим соответственно через $m\Omega_1, \ldots, m\Omega_N$.

Введем понятие диаметра множества A — это есть точная верхняя грань

$$d(A) = \sup_{P', P'' \in A} |P' - P''|.$$

В каждой части Ω_j выберем по произвольной точке $Q_j = (\xi_j, \eta_j)$ $(j = 1, \ldots, N)$ и составим сумму

$$V_N = \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j, \tag{2}$$

которую естественно считать приближенным выражением искомого объема V. Надо думать, что приближение $V \approx V_N$ будет тем более точным, чем меньшими будут диаметры $d(\Omega_j)$ частей Ω_j.

*) См. далее § 12.2.

Поэтому естественно *объем* нашего тела определить как предел суммы (2)

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega, \tag{3}$$

когда максимальный диаметр частичных множеств разбиения (1) стремится к нулю, если, конечно, этот предел существует и равен одному и тому же числу независимо от способа последовательного разбиения Ω.

Можно отвлечься от задачи о нахождении объема тела и смотреть на выражение (3) как на некоторую операцию, которая производится над функцией f, определенной на Ω. Эта операция называется *операцией двойного интегрирования по Риману функции f на множестве* Ω, а ее результат — *определенным двойным интегралом* (*Римана*) *от f на* Ω, обозначаемым так:

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j = \int_{\Omega}\int f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\Omega} f(Q)\, dQ = \int_{\Omega} f\, d\Omega.$$

Пусть теперь в трехмерном пространстве, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задано тело Ω (множество) с неравномерно распределенной в нем массой с плотностью распределения $\mu(x, y, z) = \mu(Q)$ $(Q = (x, y, z) \in \Omega)$. Требуется определить общую массу тела Ω.

Чтобы решить эту задачу, естественно произвести разбиение Ω на части $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$, объемы (трехмерные меры) которых (в предположении, что они существуют) пусть будут $m\Omega_1, \ldots$ $\ldots, m\Omega_N$, выбрать произвольным образом в каждой части по точке $(Q_j = (x_j, y_j, z_j) \in \Omega_j)$ и считать, что искомая масса равна

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j)\, m\Omega_j. \tag{4}$$

Снова на выражение (4) можно смотреть как на определенную операцию над функцией μ, заданной теперь на трехмерном множестве Ω. Эта операция на этот раз называется *операцией тройного интегрирования* (*по Риману*), а результат ее — *определенным тройным интегралом* (*Римана*), обозначаемым так:

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum \mu(Q_j)\, m\Omega_j = \int_{\Omega} \mu(Q)\, dQ = \int\int_{\Omega}\int \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

В этом же духе определяется понятие *n-кратного интеграла Римана*.

Мы увидим, что часть теории кратного интегрирования, содержащая теоремы существования и теоремы об аддитивных свойствах интеграла, может быть изложена совершенно аналогично как в одномерном, так и в *n-мерном случае*. Однако в теории кратных интегралов возникают трудности, которых не было у нас при изложении теории однократных интегралов.

Дело в том, что однократный интеграл Римана мы определили для очень простого множества — отрезка $[a, b]$, который дробился снова на отрезки. Никаких трудностей в определении длины (*одномерной меры*) отрезков не возникало. Между тем в случае двойных и вообще n-кратных интегралов область интегрирования Ω приходится делить на части с криволинейными границами и возникает вопрос об общем определении понятия площади или вообще n-мерной меры этих частей. Конечно, этот вопрос возник бы и при $n = 1$, если бы мы определяли интеграл Римана не на отрезке, а на более или менее сложном одномерном множестве.

В связи с этим появляется необходимость в четком определении понятия меры множества и выяснении ее свойств. Поэтому мы начинаем эту главу с изложения теории меры по Жордану, органически связанной с теорией интеграла Римана. На основе этой теории затем излагается теория кратного интеграла. Важным методом в этой последней является тот факт, что вычисление кратных интегралов может быть сведено к вычислению однократных по каждой переменной в отдельности, что дает возможность применять во многих случаях теорему Ньютона — Лейбница.

§ 12.2. Квадрируемые по Жордану множества

Рассмотрим плоскость $R = R_2$, где задана вполне определенная прямоугольная система координат (x, y), которую мы обозначим той же буквой R.

Ту же плоскость в другой, повернутой системе координат (ξ, η) мы будем обозначать через R'.

Простейшим множеством на R мы будем считать прямоугольник Δ. Аналитически его можно определить следующим образом: существует такая прямоугольная система координат R', в которой Δ определяется как множество точек (ξ, η), удовлетворяющих неравенствам

$$a_1 \leqslant \xi \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant \eta \leqslant b_2, \tag{1}$$

где $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Система координат R' обладает тем свойством, что стороны Δ параллельны ее осям. Чтобы подчеркнуть, что стороны Δ параллельны осям системы R', мы будем писать $\Delta = \Delta_{R'}$. Заметим, что мы считаем Δ замкнутыми множествами.

Мы вводим еще понятие *элементарной фигуры* σ. Множество $\sigma \subset R$ мы называем элементарной фигурой, если оно есть (теоретико-множественная) сумма конечного числа прямоугольников $\Delta \subset R$, которые могут пересекаться только по частям своих гра-