рии кратных интегралов возникают трудности, которых не было у нас при изложении теории однократных интегралов.

Дело в том, что однократный интеграл Римана мы определили для очень простого множества — отрезка $[a, b]$, который дробился снова на отрезки. Никаких трудностей в определении длины (*одномерной меры*) отрезков не возникало. Между тем в случае двойных и вообще n-кратных интегралов область интегрирования Ω приходится делить на части с криволинейными границами и возникает вопрос об общем определении понятия площади или вообще n-мерной меры этих частей. Конечно, этот вопрос возник бы и при $n = 1$, если бы мы определяли интеграл Римана не на отрезке, а на более или менее сложном одномерном множестве.

В связи с этим появляется необходимость в четком определении понятия меры множества и выяснении ее свойств. Поэтому мы начинаем эту главу с изложения теории меры по Жордану, органически связанной с теорией интеграла Римана. На основе этой теории затем излагается теория кратного интеграла. Важным методом в этой последней является тот факт, что вычисление кратных интегралов может быть сведено к вычислению однократных по каждой переменной в отдельности, что дает возможность применять во многих случаях теорему Ньютона — Лейбница.

§ 12.2. Квадрируемые по Жордану множества

Рассмотрим плоскость $R = R_2$, где задана вполне определенная прямоугольная система координат (x, y), которую мы обозначим той же буквой R.

Ту же плоскость в другой, повернутой системе координат (ξ, η) мы будем обозначать через R'.

Простейшим множеством на R мы будем считать прямоугольник Δ. Аналитически его можно определить следующим образом: существует такая прямоугольная система координат R', в которой Δ определяется как множество точек (ξ, η), удовлетворяющих неравенствам

$$a_1 \leqslant \xi \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant \eta \leqslant b_2, \tag{1}$$

где $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Система координат R' обладает тем свойством, что стороны Δ параллельны ее осям. Чтобы подчеркнуть, что стороны Δ параллельны осям системы R', мы будем писать $\Delta = \Delta_{R'}$. Заметим, что мы считаем Δ замкнутыми множествами.

Мы вводим еще понятие *элементарной фигуры* σ. Множество $\sigma \subset R$ мы называем элементарной фигурой, если оно есть (теоретико-множественная) сумма конечного числа прямоугольников $\Delta \subset R$, которые могут пересекаться только по частям своих границ. Площадь $|\sigma|$ двумерной фигуры σ определяется как сумма площадей прямоугольников Δ, из которых состоит σ.

Фигура σ может быть бесконечным числом способов представлена как конечная сумма прямоугольников Δ. Однако площадь $|\sigma|$ не зависит от способа представления. Это утверждение доказывается средствами элементарной геометрии. Мы не будем на этом останавливаться.

Пустое множество также считается фигурой, и мера его считается равной нулю.

Определяя прямоугольник при помощи неравенств (1), мы считали $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Таким образом, мы не будем считать отдельные точки или отрезки прямоугольниками — в этом не будет надобности при изложении данной теории.

Среди фигур σ мы выделим такие, что все прямоугольники Δ, из которых они состоят, суть $\Delta \equiv \Delta_R$, т. е. они имеют стороны, параллельные осям системы координат R. Такие фигуры мы будем обозначать символом σ_R.

Отметим ряд свойств фигур σ. Доказательства их элементарны, и мы не будем на них останавливаться.

а) *Если* $\sigma_1 \subset \sigma_2$, *то* $|\sigma_1| \leqslant |\sigma_2|$.

б) *Сумма* (теоретико-множественная) *фигур* σ'_R *и* σ''_R *есть фигура* σ_R, *и выполняется неравенство*

$$|\sigma'_R + \sigma''_R| \leqslant |\sigma'_R| + |\sigma''_R|. \tag{2}$$

Оно обращается в равенство, если σ'_R *и* σ''_R *пересекаются разве что по части их границ.*

в) *Разность* $\sigma'_R - \sigma''_R$ *двух фигур* σ'_R, σ''_R *не обязательно есть замкнутое множество, поэтому она не обязательно есть фигура. Она может стать фигурой (пустой), лишь если* $\sigma'_R \subset \sigma''_R$ *или если* σ'_R *и* σ''_R *не пересекаются. Но замыкание* $\overline{\sigma'_R - \sigma''_R}$ *есть всегда фигура, и при этом выполняется неравенство*

$$|\overline{\sigma'_R - \sigma''_R}| \geqslant |\sigma'_R| - |\sigma''_R|. \tag{3}$$

Оно обращается в равенство, если $\sigma''_R \subset \sigma'_R$.

г) *Если фигуру* σ_R *рассечь прямой, параллельной одной из осей* R, *то она разделится на две фигуры* σ'_R *и* σ''_R.

К этим свойствам нам придется еще добавить два, одно из которых основано на понятии сетки.

Зададим натуральное число N и построим два семейства прямых: $x = kh$ и $y = lh$ ($h = 2^{-N}$, k, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Оба семейства определяют прямоугольную сетку S_N, разбивающую R на квадраты Δ_h со сторонами длины h, параллельными осям R. При переходе от сетки S_N к сетке S_{N+1} каждый квадрат сетки S_N делится на четыре равных квадрата.

Пусть $G \subset R$ — произвольное непустое ограниченное множество. Обозначим через $\underset{\sim}{\omega}_N(G) = \underset{\sim}{\omega}_N$ фигуру, состоящую из тех квадратов Δ_h сетки S_N, которые полностью входят в G, и через $\tilde{\omega}_N(G) = \tilde{\omega}_N$ — фигуру, состоящую из тех квадратов Δ_h сетки S_N, каждый из которых содержит хотя бы одну точку множества G (рис. 12.1). Может, в частности, случиться, что $\underset{\sim}{\omega}_N$ есть пустое множество, но мы условились считать такое множество фигурой (имеющей меру, равную нулю).

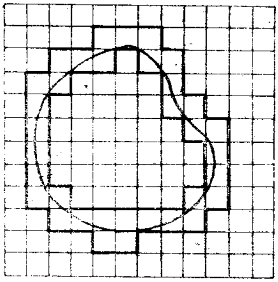

Рис. 12.1.

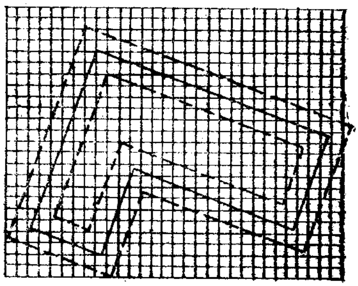

Рис. 12.2.

Очевидно, что

$$\underset{\sim}{\omega}_1 \subset \underset{\sim}{\omega}_2 \subset \ldots, \quad \tilde{\omega}_1 \supset \tilde{\omega}_2 \supset \ldots, \quad \underset{\sim}{\omega}_N(G) \subset G \subset \tilde{\omega}_{N'}(G),$$

где N и N' — произвольные натуральные числа. Отсюда следует, что существуют конечные пределы

$$m_iG = \lim_{N\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N|, \quad m_eG = \lim_{N\to\infty} |\tilde{\omega}_N|, \quad m_iG \leqslant m_eG.$$

Число m_iG называется *внутренней (двумерной) мерой Жордана множества* G, а число m_eG называется *внешней (двумерной) мерой Жордана множества* G. Слово «Жордана» мы не всегда будем добавлять в целях краткости. В этом параграфе мы не всегда будем также в целях краткости добавлять слово «двумерный». Всюду в этом параграфе будет идти речь о двумерных мерах по Жордану.

Мы доказали, что произвольное ограниченное множество $G \subset R$ имеет внутреннюю и внешнюю жордановы меры m_iG и m_eG, удовлетворяющие неравенству $m_iG \leqslant m_eG$.

Если для множества $G \subset R$ $m_iG = m_eG = mG$, то G называется *измеримым по Жордану* и число mG называют *жордановой двумерной мерой* G. Двумерное (только двумерное) измеримое по Жордану множество называют также *квадрируемым*.

Теперь мы можем сформулировать нужное нам свойство фигур σ:

д) *Фигура σ (состоящая из прямоугольников, как угодно повернутых по отношению к системе координат R) есть измеримое по Жордану множество. При этом* $m\sigma = |\sigma|$.

На рис. 12.2 изображены фигура σ и еще две фигуры σ′ и σ″ со сторонами, параллельными соответствующим сторонам σ, такие, что $\sigma' \subset \sigma \subset \sigma''$. Ясно, что для данной фигуры σ и данного $\varepsilon > 0$ можно указать две фигуры σ′ и σ″ такие, что выполняются условия:

1) $\sigma' \subset \sigma \subset \sigma''$,

2) $|\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$,

3) точки границ σ′ и σ″ отстоят от любой точки границы σ на расстоянии, большем некоторого положительного числа α.

Если теперь в системе координат R взять сетку S_N, где $\sqrt{2}h = \sqrt{2}\cdot 2^{-N} < \alpha$, то $\sigma'' - \sigma'$ содержит любой квадрат сетки, покрывающей хотя бы одну точку границы σ. Поэтому сумма площадей всех квадратов сетки S, покрывающих границу σ, не превышает $|\sigma'' - \sigma'| = |\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$|\tilde{\omega}_N(\sigma)| - |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| < \varepsilon, \tag{2}$$

и так как ε как угодно мало, и $|\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| \leqslant |\sigma| \leqslant |\tilde{\omega}_N(\sigma)|$, то

$$m_i\sigma = m_e\sigma = m\sigma = |\sigma|.$$

Докажем следующие равенства, выражающие различные эквивалентные определения внутренней и внешней мер ограниченного множества G:

$$m_iG = \lim_{N\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| = \sup_N |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| = \sup_{\sigma_R\subset G} |\sigma_R| = \sup_{\sigma\subset G} |\sigma|, \tag{3}$$

$$m_eG = \lim_{N\to\infty} |\tilde{\omega}_N(G)| = \inf_N |\tilde{\omega}_N(G)| = \inf_{\sigma_R\supset G} |\sigma_R| = \inf_{\sigma\supset G} |\sigma|. \tag{4}$$

Первое равенство в (3) есть уже данное выше определение m_iG. Оно дает эффективный способ получения m_iG. Однако оно связано с исходной системой координат R, потому что сетка связана с R.

Второе равенство очевидно, так как величина $|\underset{\sim}{\omega}_N(G)|$ возрастает вместе с N.

Так как $\underset{\sim}{\omega}_N(G)$ есть в то же время некоторая фигура σ_R, а σ_R есть некоторая σ, то очевидно, что

$$\sup_N |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| \leqslant \sup_{\sigma_R\subset G} |\sigma_R| \leqslant \sup_{\sigma\subset G} |\sigma|. \tag{5}$$

С другой стороны, если $\sigma \subset G$ есть произвольная фигура и $\varepsilon > 0$, то в силу измеримости σ можно указать N настолько большим, что

$$|\sigma| < |\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)| + \varepsilon \leqslant |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| + \varepsilon \leqslant m_iG + \varepsilon.$$

Отсюда $\sup\limits_{\sigma\subset G}|\sigma|\leqslant m_iG+\varepsilon$ и в силу произвольности ε

$$\sup_{\sigma\subset G}|\sigma|\leqslant m_iG. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следуют третье и четвертое равенства (3) (первые два уже доказаны).

Последний член в (3) показывает, что *внутренняя мера m_iG инвариантна относительно любой системы координат*, т. е. она не зависит от системы координат R, в которой она рассматривается.

Аналогично доказываются равенства (4).

Из равенств (3), (4) легко следует

Лемма 1. *Для того чтобы множество G было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовали две фигуры $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\tilde\sigma$ ($\underset{\sim}{\sigma}\subset G\subset\tilde\sigma$) такие, что* $|\tilde\sigma|-|\underset{\sim}{\sigma}|<\varepsilon$.

При этом можно считать, что $\tilde\sigma=\tilde\sigma_R$, $\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{\sigma}_R$.

Действительно, если множество измеримо и R — заданная система координат, то найдутся такие $\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{\sigma}_R\subset G$ и $\tilde\sigma=\tilde\sigma_R\supset G$, что

$$mG-\frac{\varepsilon}{2}<|\underset{\sim}{\sigma}|\leqslant|\tilde\sigma|<mG+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{и}\quad|\tilde\sigma|-|\underset{\sim}{\sigma}|<\varepsilon.$$

Наоборот, из того, что $\underset{\sim}{\sigma}\subset G\subset\tilde\sigma$, следует, что $|\underset{\sim}{\sigma}|\leqslant m_iG\leqslant m_eG\leqslant\leqslant|\tilde\sigma|$, а если $|\tilde\sigma|-|\underset{\sim}{\sigma}|<\varepsilon$, то $m_eG-m_iG<\varepsilon$, и вследствие произвольности $\varepsilon>0$

$$m_eG=m_iG.$$

Из леммы 1 следует, что *измеримое множество ограничено.*

Лемма 2. *Для того чтобы множество G было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы его граница Γ имела жорданову (плоскую) меру нуль, т. е. для всякого $\varepsilon>0$ должна найтись покрывающая Γ фигура σ_0, имеющая меру* $|\sigma_0|<\varepsilon$.

Доказательство. Пусть множество G измеримо. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ (см. рис. 12.1) найдутся две фигуры $\sigma'=\sigma'_R$ и $\sigma''=\sigma''_R$, такие, что $\sigma'\subset G\subset\sigma''$ и $|\sigma''|-|\sigma'|<\varepsilon$. Всегда можно считать, что точки границы Γ множества G не лежат на границе σ'', так же как на границе σ'. Если бы это было для взятых σ' и σ'' не так, то можно фигуру σ'' увеличить (раздать), а σ' уменьшить в направлении оси x и оси y, однако настолько, чтобы написанное неравенство осталось не нарушенным. Тогда очевидно, что

$$\Gamma\subset\sigma''-\sigma'\subset\overline{\sigma''-\sigma'}=\sigma_0\quad\text{и}\quad|\sigma_0|=|\sigma''|-|\sigma'|<\varepsilon,$$

т. е. удалось покрыть Γ фигурой σ_0, имеющей площадь, меньшую чем ε.

Наоборот, пусть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать покрывающую Γ фигуру (см. рис. 12.1) $\sigma_0 = \sigma_R^0$, $|\sigma_0| < \varepsilon$. Можно считать, что Γ не имеет общих точек с границей σ_0. Если это не так для выбранной фигуры, то ее можно дополнительно раздать, сохранив неравенство $|\sigma_0| < \varepsilon$.

Положим $\sigma'' = G + \sigma_0$ и $\sigma' = \overline{G - \sigma_0}$. Нетрудно видеть, что σ' и σ'' суть фигуры (см. рис. 12.1) и притом $\sigma' = \sigma_R'$, $\sigma'' = \sigma_R''$, $\sigma' \subset G \subset \sigma''$, $\sigma'' - \sigma' = \sigma_0$ и $|\sigma''| - |\sigma'| = |\sigma_0| < \varepsilon$. Это показывает, что G — измеримое множество.

Лемма 3. *Сумма двух множеств G_1 и G_2, имеющих жорданову меру нуль, в свою очередь имеет жорданову меру нуль.*

Действительно, по условию для всякого $\varepsilon > 0$ существуют фигуры σ_R' и σ_R'' такие, что $\sigma_R' \supset G_1$, $\sigma_R'' \supset G_2$ и $|\sigma_R'| < \varepsilon/2$, $|\sigma_R''| < \varepsilon/2$. Тогда фигура $\sigma_R = \sigma_R' + \sigma_R''$ будет обладать свойствами

$$\sigma_R \supset G_1 + G_2, \quad |\sigma_R| \leqslant |\sigma_R'| + |\sigma_R''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма 4. *Вместе с G и $G_1 \subset G$ есть множество жордановой меры нуль.*

Лемма очевидна.

Теорема 1. *Если два множества G_1 и G_2 измеримы по Жордану, то измеримы по Жордану также их сумма, разность и пересечение.*

Доказательство. Будем обозначать через $\Gamma(E)$ границу множества E. Имеют место легко проверяемые теоретико-множественные вложения

$$\Gamma(G_1 + G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2),$$
$$\Gamma(G_1 \cdot G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2),$$
$$\Gamma(G_1 - G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2).$$

Так как G_1 и G_2 измеримы, то по лемме 2 $m\Gamma(G_1) = 0$, $m\Gamma(G_2) = 0$. Но тогда по лемме 3 правые части написанных вложений имеют меру нуль, по лемме 4 и левые части имеют меру нуль. Отсюда, применяя снова лемму 2, получим, что множества, указанные в теореме, измеримы.

Лемма 5. *Если измеримое по Жордану множество G рассечь на две части G_1 и G_2 при помощи куска кривой L (в частности прямой), имеющей жорданову меру нуль, то каждая часть в свою очередь измерима по Жордану.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\Gamma(G_1) \subset \Gamma(G) + L, \quad \Gamma(G_2) \subset \Gamma(G) + L,$$

откуда на основании предыдущих лемм следует утверждение.

Таким образом, *если G есть измеримое по Жордану множество, то любая сетка S_N (связанная с любой системой коорди-*

нат R) дробит G на части, каждая из которых измерима по Жордану. Диаметр каждой из этих частей не превышает $\sqrt{2}\,2^{-N}$. Таким образом, при $N\to\infty$ диаметры частей равномерно стремятся к нулю.

Отметим еще одно свойство фигур σ.

е) *Если фигуру σ подвергнуть в R операции сдвига или вращения, то получим фигуру σ' и $|\sigma| = |\sigma'|$.*

С помощью этого свойства и того факта, что при сдвиге и вращении соотношение вложения $A\subset B$ сохраняется, следует

Лемма 6. *Если G_* есть множество, полученное из измеримого множества $G\subset R$ посредством сдвига или вращения его в R, то G_* — измеримое множество и $mG = mG_*$.*

Пример. Приведем пример неквадрируемого (не измеримого в двумерном смысле) множества. Пусть G — не пустое открытое ограниченное множество и E — множество всех его рациональных точек, т. е. имеющих рациональные координаты (x, y). Очевидно, что $\underset{\sim}{\omega}_N(E)$ есть пустое множество для любого натурального N и $m_i(E) = 0$. С другой стороны, пусть точка $\mathbf{x}^0\in G$, тогда найдется невырожденный прямоугольник Δ, принадлежащий G и содержащий $\mathbf{x}^0$. Очевидно, что $\tilde{\omega}_N(E)\supset\Delta$, $|\tilde{\omega}_N(E)|\geqslant|\Delta|>0$, $m_eE\geqslant|\Delta|>0$.

Таким образом, $m_iE < m_eE$ и E — неквадрируемое множество.

Докажем аддитивное свойство жордановой меры.

Теорема 2. *Если множества G_1 и G_2 измеримы по Жордану и имеют общие точки, принадлежащие разве что их границам, то их (измеримая по теореме 1) сумма имеет меру, равную сумме их мер:*

$$m(G_1+G_2) = mG_1 + mG_2. \tag{7}$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon>0$ и подберем фигуры $\sigma_1' = \sigma_{1,R}'$, $\sigma_1'' = \sigma_{1,R}''$, $\sigma_2' = \sigma_{2,R}'$, $\sigma_2'' = \sigma_{2,R}''$ такие, что

$$\sigma_1'\subset G_1\subset\sigma_1'',\quad \sigma_2'\subset G_2\subset\sigma_2'',$$

$$mG_1-\varepsilon<|\sigma_1'|<|\sigma_1''|<mG_1+\varepsilon,\ mG_2-\varepsilon<|\sigma_2'|<|\sigma_2''|<mG_2+\varepsilon.$$

Положим $\sigma' = \sigma_1'+\sigma_2'$, $\sigma'' = \sigma_1''+\sigma_2''$. Очевидно, что σ' и σ'' — фигуры, при этом $\sigma'\subset G_1+G_2\subset\sigma''$ и

$$|\sigma''|\leqslant|\sigma_1''|+|\sigma_2''|,\quad |\sigma'| = |\sigma_1'|+|\sigma_2'|. \tag{8}$$

Равенство в (8) справедливо потому, что σ_1' и σ_2' вместе с G_1 и G_2 пересекаются разве что по своим границам.

Теперь очевидно, что

$$(mG_1-\varepsilon)+(mG_2-\varepsilon)<|\sigma_1'|+|\sigma_2'| = |\sigma'|\leqslant m_i(G_1+G_2)\leqslant$$
$$\leqslant m_e(G_1+G_2)\leqslant|\sigma''|\leqslant|\sigma_1''|+|\sigma_2''|<(mG_1+\varepsilon)+(mG_2+\varepsilon),$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon>0$ следует (7).

Теорема 3. *Если G_1 и G_2 измеримы по Жордану и $G_1 \subset G_2$, то*

$$m(G_2 - G_1) = mG_2 - mG_1. \tag{9}$$

Доказательство. Измеримость $G_2 - G_1$ доказана в теореме 1, поэтому измеримое множество G_2 распадается на два непересекающиеся измеримые множества: $G_2 = G_1 + (G_2 - G_1)$. Но тогда равенство (9) следует из предыдущей теоремы.

§ 12.3. Важные примеры квадрируемых по Жордану множеств

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и интегрируема (в частности, непрерывна) на нем. Обозначим через Γ ее график — множество всех точек $(x, f(x))$, где $a \leqslant x \leqslant b$, и через Ω — множество всех точек (x, y) плоскости, для которых выполняются неравенства

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Теорема 1. *Множество Ω измеримо и его мера (двумерная) равна*

$$m\Omega = \int_a^b f(x)\,dx = I.$$

В самом деле, в силу интегрируемости f на $[a, b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение R отрезка $[a, b]$ такое, что

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\underline{S}_R$ и $\overline{S}_R$ — соответствующие R нижняя и верхняя интегральные суммы функции f, равные площадям фигур, первая из которых принадлежит Ω, а вторая содержит Ω.

Это доказывает теорему.

Теорема 2. *Непрерывная (плоская) кривая Γ на плоскости x, y, проектируемая взаимно однозначно на отрезок $[a, b]$ некоторой прямой L, есть множество точек, имеющее двумерную меру нуль.*

В самом деле, можно считать, что Γ находится по одну сторону от прямой L, иначе в качестве L можно взять другую ей параллельную прямую, удовлетворяющую этим свойствам. Построим прямоугольную систему координат x, y с осью x, совпадающей с L. Тогда Γ будет графиком некоторой непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Множество Ω, определенное для f как в теореме 1, на основании этой теоремы измеримо, а Γ как часть границы Ω имеет двумерную меру нуль.

Теорема 3. *Плоское ограниченное множество Ω измеримо (в двумерном смысле), если его граница состоит из конечного*