Теорема 3. *Если G_1 и G_2 измеримы по Жордану и $G_1 \subset \subset G_2$, то*

$$m(G_2 - G_1) = mG_2 - mG_1. \tag{9}$$

Доказательство. Измеримость $G_2 - G_1$ доказана в теореме 1, поэтому измеримое множество G_2 распадается на два непересекающиеся измеримые множества: $G_2 = G_1 + (G_2 - G_1)$. Но тогда равенство (9) следует из предыдущей теоремы.

§ 12.3. Важные примеры квадрируемых по Жордану множеств

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и интегрируема (в частности, непрерывна) на нем. Обозначим через Γ ее график — множество всех точек $(x, f(x))$, где $a \leqslant x \leqslant b$, и через Ω — множество всех точек (x, y) плоскости, для которых выполняются неравенства

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Теорема 1. *Множество Ω измеримо и его мера (двумерная) равна*

$$m\Omega = \int_a^b f(x)\,dx = I.$$

В самом деле, в силу интегрируемости f на $[a, b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение R отрезка $[a, b]$ такое, что

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\underline{S}_R$ и $\overline{S}_R$ — соответствующие R нижняя и верхняя интегральные суммы функции f, равные площадям фигур, первая из которых принадлежит Ω, а вторая содержит Ω.

Это доказывает теорему.

Теорема 2. *Непрерывная (плоская) кривая Γ на плоскости x, y, проектируемая взаимно однозначно на отрезок $[a, b]$ некоторой прямой L, есть множество точек, имеющее двумерную меру нуль.*

В самом деле, можно считать, что Γ находится по одну сторону от прямой L, иначе в качестве L можно взять другую ей параллельную прямую, удовлетворяющую этим свойствам. Построим прямоугольную систему координат x, y с осью x, совпадающей с L. Тогда Γ будет графиком некоторой непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Множество Ω, определенное для f как в теореме 1, на основании этой теоремы измеримо, а Γ как часть границы Ω имеет двумерную меру нуль.

Теорема 3. *Плоское ограниченное множество Ω измеримо (в двумерном смысле), если его граница состоит из конечного* *числа точек и кусков непрерывных кривых, каждый из которых проектируется взаимно однозначно на одну из осей прямоугольной системы координат.*

В самом деле, граница множества Ω есть сумма конечного числа множеств, имеющих двумерную меру нуль.

Заметим, что гладкий кусок кривой Γ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ (φ' и ψ' непрерывны и $\varphi'^2+\psi'^2>0$) всегда можно разбить на конечное число частей, проектирующихся на одну из осей координат. Ведь (см. § 6.5) каждую точку $t\in[a, b]$ можно покрыть интервалом (t', t'') (в случае $t=a$ или $t=b$ — полуинтервалом) таким, что соответствующая ему часть нашей гладкой кривой проектируется на одну из осей, а на основании леммы Бореля среди этих интервалов можно выбрать конечное их число, все же покрывающих отрезок $[a, b]$. Другое доказательство того факта, что гладкий кусок кривой имеет двумерную меру нуль, см. в § 12.5, теорема 3.

В заключение отметим, что произвольная плоская непрерывная кривая может и не иметь двумерной меры нуль. Вспомним о кривой Пеано, точки которой заполняют квадрат (см. § 6.5).

§ 12.4. Еще один критерий измеримости множества. Полярные координаты

Внутреннюю и внешнюю меры ограниченного множества Ω можно еще определить так:

$$m_i\Omega=\sup_{\Omega'\subset\Omega} m\Omega',\quad m_e\Omega=\inf_{\Omega'\supset\Omega} m\Omega', \tag{1}$$

где Ω' обозначает произвольное измеримое множество, в первом случае принадлежащее Ω, а во втором — содержащее Ω. В самом деле, с одной стороны,

$$m_i\Omega=\sup_{\sigma\subset\Omega}|\sigma|\leqslant\sup_{\Omega'\subset\Omega} m\Omega'=I,$$

потому что фигуры σ измеримы, а с другой стороны, если $\varepsilon>0$ и Ω' — такое измеримое множество, что $\Omega'\subset\Omega$ и $I-\varepsilon<m\Omega'$, то найдется также $\sigma\subset\Omega'$, так что $m\Omega'<|\sigma|+\varepsilon$. Следовательно, $I-2\varepsilon<|\sigma|\leqslant m_i\Omega$, и вследствие произвольности ε имеет место $I\leqslant m_i\Omega$. Мы доказали первое равенство (1). Подобным образом доказывается и второе.

Из (1), очевидно, следует: *для того чтобы множество Ω было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $\varepsilon>0$, нашлись два измеримых множества Ω' и Ω'' таких, что $\Omega'\subset\Omega\subset\Omega''$ и $m\Omega''-m\Omega'<\varepsilon$.*

Площадь (двумерная жорданова мера) фигуры Ω, ограниченной полярными лучами $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$ $(\theta_1<\theta_2)$ и кривой Γ, определяемой в полярных координатах непрерывной функцией $\rho=f(\theta)$, равна (см. § 10.1 и вопрос, поставленный там)

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2\,d\theta. \tag{2}$$