числа точек и кусков непрерывных кривых, каждый из которых проектируется взаимно однозначно на одну из осей прямоугольной системы координат.

В самом деле, граница множества Ω есть сумма конечного числа множеств, имеющих двумерную меру нуль.

Заметим, что гладкий кусок кривой Γ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ (φ' и ψ' непрерывны и $\varphi'^2+\psi'^2>0$) всегда можно разбить на конечное число частей, проектирующихся на одну из осей координат. Ведь (см. § 6.5) каждую точку $t\in[a,\ b]$ можно покрыть интервалом $(t',\ t'')$ (в случае $t=a$ или $t=b$ — полуинтервалом) таким, что соответствующая ему часть нашей гладкой кривой проектируется на одну из осей, а на основании леммы Бореля среди этих интервалов можно выбрать конечное их число, все же покрывающих отрезок $[a,\ b]$. Другое доказательство того факта, что гладкий кусок кривой имеет двумерную меру нуль, см. в § 12.5, теорема 3.

В заключение отметим, что произвольная плоская непрерывная кривая может и не иметь двумерной меры нуль. Вспомним о кривой Пеано, точки которой заполняют квадрат (см. § 6.5).

§ 12.4. Еще один критерий измеримости множества. Полярные координаты

Внутреннюю и внешнюю меры ограниченного множества Ω можно еще определить так:

$$m_i\Omega=\sup_{\Omega'\subset\Omega} m\Omega',\quad m_e\Omega=\inf_{\Omega'\supset\Omega} m\Omega',\tag{1}$$

где Ω' обозначает произвольное измеримое множество, в первом случае принадлежащее Ω, а во втором — содержащее Ω. В самом деле, с одной стороны,

$$m_i\Omega=\sup_{\sigma\subset\Omega}|\sigma|\leqslant\sup_{\Omega'\subset\Omega} m\Omega'=I,$$

потому что фигуры σ измеримы, а с другой стороны, если $\varepsilon>0$ и Ω' — такое измеримое множество, что $\Omega'\subset\Omega$ и $I-\varepsilon<m\Omega'$, то найдется также $\sigma\subset\Omega'$, так что $m\Omega'<|\sigma|+\varepsilon$. Следовательно, $I-2\varepsilon<|\sigma|\leqslant m_i\Omega$, и вследствие произвольности ε имеет место $I\leqslant m_i\Omega$. Мы доказали первое равенство (1). Подобным образом доказывается и второе.

Из (1), очевидно, следует: *для того чтобы множество Ω было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $\varepsilon>0$, нашлись два измеримых множества Ω' и Ω'' таких, что $\Omega'\subset\Omega\subset\Omega''$ и $m\Omega''-m\Omega'<\varepsilon$.*

Площадь (двумерная жорданова мера) фигуры Ω, ограниченной полярными лучами $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$ $(\theta_1<\theta_2)$ и кривой Γ, определяемой в полярных координатах непрерывной функцией $\rho=f(\theta)$, равна (см. § 10.1 и вопрос, поставленный там)

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2\,d\theta.\tag{2}$$

Покажем, что $m\Omega = S$. В самом деле, произвольный круговой сектор есть измеримое множество, потому что его граница есть непрерывная кусочно гладкая кривая. Далее, из существования интеграла (2) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение отрезка $[\theta_1, \theta_2]$, что соответствующая ему верхняя интегральная сумма отличается от нижней менее чем на ε. Но верхняя сумма есть мера суммы конечного числа круговых секторов, содержащих Ω, а нижняя есть мера суммы конечного числа круговых секторов, содержащихся в Ω. Это и доказывает наше утверждение в силу (1).

§ 12.5. Измеримые по Жордану трехмерные и n-мерные множества

Теория, изложенная в предыдущих параграфах, легко переносится на случай любого числа измерений $n = 1, 2, 3, \ldots$

Остановим пока наше внимание на случае трех измерений. В этом случае мы вводим в качестве простейших фигур замкнутые прямоугольники (параллелепипеды) и обозначаем их символами Δ. Теперь уже в качестве меры Δ рассматривается объем Δ, т. е. число $|\Delta|$, равное произведению длин трех ребер Δ (ширины, длины, высоты). Рассматриваются только невырожденные прямоугольники, у которых все три ребра положительны.

Вводим понятие фигуры σ как множества точек, представляющего собой конечную сумму прямоугольников Δ, которые могут пересекаться только по частям своих границ.

Объем $|\sigma|$ фигуры σ определяется как сумма объемов $|\Delta|$ прямоугольников Δ, из которых она состоит. Пустое множество считается фигурой с объемом, равным нулю.

Если R' есть какая-либо прямоугольная система координат, то прямоугольники и фигуры с ребрами, параллельными осям R', обозначаем еще через $\Delta_{R'}$ и $\sigma_{R'}$. Вводим в $R = R_3$ для каждого натурального числа N сеть S_N, образуемую тремя семействами плоскостей

$$x = kh, \quad y = lh, \quad z = mh \quad (h = 2^{-N},\ k,\ l,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Сеть S_N разбивает пространство R на кубы Δ_h с ребрами длины h, параллельными осям координат. Определяем для любого ограниченного множества $G \subset R$ множество $\underset{\sim}{\omega}_N(G)$ как сумму тех Δ_h, которые полностью принадлежат G, и множество $\tilde{\omega}_N(G)$ как сумму всех тех кубов Δ_h, каждый из которых содержит в себе хотя бы одну точку из G.

Аналогично § 12.2 *внешнюю и внутреннюю меры* G определяем как пределы монотонных последовательностей

$$m_e G = \lim_{N \to \infty} |\tilde{\omega}_N(G)|, \quad m_i G = \lim_{N \to \infty} |\underset{\sim}{\omega}_N(G)|$$

и называем множеством G *измеримым по Жордану в трехмерном смысле*, если $m_i G = m_e G = mG$. Число mG называется *жордановой трехмерной мерой* G.