Покажем, что $m\Omega = S$. В самом деле, произвольный круговой сектор есть измеримое множество, потому что его граница есть непрерывная кусочно гладкая кривая. Далее, из существования интеграла (2) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение отрезка $[\theta_1, \theta_2]$, что соответствующая ему верхняя интегральная сумма отличается от нижней менее чем на ε. Но верхняя сумма есть мера суммы конечного числа круговых секторов, содержащих Ω, а нижняя есть мера суммы конечного числа круговых секторов, содержащихся в Ω. Это и доказывает наше утверждение в силу (1).

§ 12.5. Измеримые по Жордану трехмерные и n-мерные множества

Теория, изложенная в предыдущих параграфах, легко переносится на случай любого числа измерений $n = 1, 2, 3, \ldots$

Остановим пока наше внимание на случае трех измерений. В этом случае мы вводим в качестве простейших фигур замкнутые прямоугольники (параллелепипеды) и обозначаем их символами Δ. Теперь уже в качестве меры Δ рассматривается объем Δ, т. е. число $|\Delta|$, равное произведению длин трех ребер Δ (ширины, длины, высоты). Рассматриваются только невырожденные прямоугольники, у которых все три ребра положительны.

Вводим понятие фигуры σ как множества точек, представляющего собой конечную сумму прямоугольников Δ, которые могут пересекаться только по частям своих границ.

Объем $|\sigma|$ фигуры σ определяется как сумма объемов $|\Delta|$ прямоугольников Δ, из которых она состоит. Пустое множество считается фигурой с объемом, равным нулю.

Если R' есть какая-либо прямоугольная система координат, то прямоугольники и фигуры с ребрами, параллельными осям R', обозначаем еще через $\Delta_{R'}$ и $\sigma_{R'}$. Вводим в $R = R_3$ для каждого натурального числа N сеть S_N, образуемую тремя семействами плоскостей

$$x = kh, \quad y = lh, \quad z = mh \quad (h = 2^{-N},\ k,\ l,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Сеть S_N разбивает пространство R на кубы Δ_h с ребрами длины h, параллельными осям координат. Определяем для любого ограниченного множества $G \subset R$ множество $\underset{\sim}{\omega}_N(G)$ как сумму тех Δ_h, которые полностью принадлежат G, и множество $\tilde{\omega}_N(G)$ как сумму всех тех кубов Δ_h, каждый из которых содержит в себе хотя бы одну точку из G.

Аналогично § 12.2 *внешнюю и внутреннюю меры* G определяем как пределы монотонных последовательностей

$$m_eG = \lim_{N\to\infty} |\tilde{\omega}_N(G)|, \quad m_iG = \lim_{N\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N(G)|$$

и называем множеством G *измеримым по Жордану в трехмерном смысле*, если $m_iG = m_eG = mG$. Число mG называется *жордановой трехмерной мерой* G.

Свойства трехмерной меры совершенно аналогичны свойствам двумерной меры, изложенным в § 12.2. Чтобы убедиться в этом, нужно только проверить справедливость свойств а) — е) фигур σ, теперь уже трехмерных. Это проверяется элементарными средствами. Теоремы в § 12.2 были доказаны исключительно на основе свойств а) — е), поэтому эти утверждения верны и в трехмерном случае. Несколько видоизменяется только лемма 5 из § 12.2. В трехмерном случае она гласит:

Лемма. *Если измеримое множество $G \subset R$ рассечь на части при помощи конечного числа поверхностей, имеющих (трехмерную) меру нуль, то эти части будут измеримы (в трехмерном смысле).*

Изложенная теория по аналогии переносится на n-мерный случай, где n есть любое натуральное число ($n = 1, 2, \ldots$). Теперь уже $R = R_n$ есть n-мерное действительное пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Мы считаем, что R также обозначает определенную прямоугольную систему координат $R(x_1, \ldots, x_n)$. Можно в R ввести другую прямоугольную систему координат $R'(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Формулы преобразования $R \rightleftarrows R'$ записываются при помощи равенств (ортогональных преобразований)

$$x_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\xi_l \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl}a_{k_1 l} = \begin{cases} 0 & (k \neq k_1), \\ 1 & (k = k_1). \end{cases}$$

По определению множество $\Delta \subset R$ называется прямоугольным параллелепипедом, если можно указать такую прямоугольную систему координат $R'(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и такие пары чисел $a_j < b_j$ ($j = 1, \ldots, n$), что $\Delta = \{a_j \leqslant \xi_j \leqslant b_j;\ j = 1, \ldots, n\}$.

Нетрудно показать, что указанная система координат R' (для данного Δ) единственна. *n-мерный объем* Δ определяется как число

$$|\Delta| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Естественно говорить в этом случае, что Δ имеет ребра, параллельные осям координат системы R', и писать $\Delta = \Delta_{R'}$. Элементарная фигура σ в R определяется как конечная сумма прямоугольных параллелепипедов Δ, пересекающихся разве что по своим границам, а мера σ — как число $|\sigma|$, равное сумме мер указанных Δ.

Пустое множество в R_n считается фигурой, имеющей n-мерный объем, равный нулю.

Вводится также для каждого натурального N сеть S_N как n семейств плоскостей

$$x_j = k_j h \quad (j = 1, \ldots, n;\ h = 2^{-N};\ k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

разбивающих R_n на n-мерные кубы

$$\Delta_h = \{k_j h \leqslant x_j \leqslant (k_j+1)h\}.$$

Если G — ограниченное множество в R, то по определению множество $\underset{\sim}{\omega}_N(G)$ есть теоретико-множественная сумма кубов Δ_h, полностью содержащихся в G, и множество $\tilde{\omega}_N(G)$ есть сумма кубов Δ_h, каждый из которых содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x} \in G$. Очевидно, что существуют пределы монотонных последовательностей

$$\lim_{N\to\infty} |\underset{\sim}{\omega}_N(G)| = m_i G, \quad \lim_{N\to\infty} |\tilde{\omega}_N(G)| = m_e G,$$

которые и называются соответственно *внутренней* и *внешней n-мерными мерами G по Жордану*.

Далее, множество G называется *измеримым по Жордану в смысле n-мерной меры*, если для него $m_i G = m_e G = mG$. Число mG называется *n-мерной мерой G по Жордану*.

Теория n-мерной меры по Жордану полностью аналогична теории двухмерной меры, изложенной в § 12.2. Чтобы убедиться в этом, надо только проверить справедливость свойств а) — е) для n-мерных фигур σ. Это несколько кропотливо, но может быть выполнено по аналогии с тем, как это делается в трехмерном случае.

Следующая теорема обобщает теорему 2 § 12.3.

Теорема 1. *Поверхность S*

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(Q) \quad (Q = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Lambda)$$

в n-мерном пространстве, где f — непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве Λ, имеет n-мерную меру нуль.

Доказательство. Так как функция f равномерно непрерывна на Λ, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(Q) - f(Q')| < \varepsilon, \quad |Q - Q'| < \delta; \quad Q, Q' \in \Lambda.$$

Рассечем R_n сеткой

$$x_i = \alpha_i h, \quad \alpha_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$x_n = k\varepsilon, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

на равные прямоугольники Δ (прямоугольные параллелепипеды). Высота каждого Δ (в направлении x_n) равна ε, а основание Δ' (проекция Δ на $R_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$) есть куб со стороной h, подобранной так, чтобы его диаметр был меньше δ. Тем самым сетка рассекает R_{n-1} на кубы Δ'. Так как Λ ограничено, то Λ содержится в некотором $(n-1)$-мерном кубе, и общая мера кубов Δ', содержащих в себе точки Λ, не превышает некоторую константу M. Рассмотрим один из таких кубов Δ'. Среди прямоугольников Δ, имеющих его своей проекцией, может быть, очевидно, не более чем три, содержащих в себе точки поверхности S. Их общий объем не превышает $3\varepsilon|\Delta'|$, где $|\Delta'|$ есть $(n-1)$-мерная мера Δ'. Но тогда общий объем кубов Δ, покрывающих S, не превышает $3\varepsilon M$, то есть может быть сделан как угодно малым.

Пример. Пусть в прямоугольной системе координат R задан прямоугольный параллелепипед Δ со сторонами, параллельными осям другой прямоугольной системы R'. Пусть S — одна из его граней. Она проектируется взаимно однозначно на одно из $(n-1)$-мерных координатных подпространств, для определенности пусть это будет подпространство $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, и описывается линейной функцией (непрерывной) вида $x_n = \sum_{j=1}^{n-1} d_j x_j$, заданной на некотором ограниченном замкнутом множестве. По теореме 1 $mS = 0$. Так как Δ имеет конечное число граней, то Δ есть измеримое множество.

Теорема 2. *Открытое ограниченное не пустое множество G в пространстве $R_n = R$ можно представить как сумму счетного числа кубов:*

$$G = \sum_1^\infty \Delta_k \tag{1}$$

(замкнутых, с ребрами, параллельными осям координат), пересекающихся попарно разве что по своим границам. При этом

$$m_i G = \sum_1^\infty |\Delta_k| \tag{2}$$

(хотя G может и не быть измеримым по Жордану, см. § 19.7).

Доказательство. Последовательность сеток S_N $(N = 1, 2, \ldots)$ определяет (замкнутые) фигуры

$$\underset{\sim}{\omega}_1(G) \subset \underset{\sim}{\omega}_2(G) \subset \underset{\sim}{\omega}_3(G) \subset \ldots \subset G.$$

Так как G — открытое, то любая точка $\mathbf{x}^0$ может быть покрыта открытым кубом $\Delta \subset G$ с центром в ней. Но тогда при достаточно большом N куб сетки S_N, содержащий x^0, будет принадлежать Δ, следовательно, и G, тем самым он войдет в фигуру $\underset{\sim}{\omega}_N(G)$. Это показывает, что имеет место равенство

$$G = \underset{\sim}{\omega}_1(G) + (\underset{\sim}{\omega}_2(G) - \underset{\sim}{\omega}_1(G)) + (\underset{\sim}{\omega}_3(G) - \underset{\sim}{\omega}_2(G)) + \ldots$$

Перенумеруем кубы $\underset{\sim}{\omega}_1(G)$, если они есть, дальше последующими номерами перенумеруем кубы замыкания $\underset{\sim}{\omega}_2(G) - \underset{\sim}{\omega}_1(G)$, затем кубы замыкания $\underset{\sim}{\omega}_3(G) - \underset{\sim}{\omega}_2(G)$ и т. д. В результате получим последовательность $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ такую, что выполняется (1). Она бесконечна потому, что при любом m замкнутое множество $\sum_1^m \Delta_k$ отлично от содержащего его ограниченного открытого множества G.

Далее, $\sum_1^\infty |\Delta_k| = \lim_{N\to\infty} \underset{\sim}{\omega}_N(G) = m_i G$.

Теорема 3. *Поверхность S (m-мерная, $m < n$)*

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{u}) = \varphi_i(u_1, \ldots, u_m) \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \mathbf{u} \in \Omega), \tag{3}$$

где φ_i непрерывны вместе со своими частными производными на Ω

(замыкании ограниченного m-мерного открытого выпуклого множества), имеет n-мерную меру нуль.

Доказательство. Пусть

$$K \geqslant \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right| \text{ на } \Omega \quad (i=1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m).$$

Пространство точек $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ обозначим через R_m, а пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — через R_n. Разрежем R_m и R_n прямоугольными сетками на кубики с длинами ребер соответственно h и g. Поместим Ω в куб $\Delta \subset R_m$ с гранями, принадлежащими граням сетки R_m.

Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ есть точка определенного кубика ω сетки R_m и $\mathbf{u}' = (u_1, \ldots, u_m)$ — другая точка этого кубика. Пусть точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ на поверхности S соответствуют при помощи уравнений (3) точкам $u, u' \in \omega$.

На основании теоремы о среднем (см. § 7.13, (12))

$$|x_j' - x_j| = \left| \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_s} \right)_1 (u_s' - u_s) \right| \leqslant Kmh.$$

Здесь $(\ \ )_1$ обозначает, что в $(\ \ )$ подставлена некоторая промежуточная точка между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$.

Будем считать, что $g = Kmh$.

Тогда, если $\mathbf{x}$ попала в некоторый кубик σ сетки R_n, то точка $\mathbf{x}'$ будет, очевидно, принадлежать либо тому же кубику σ, либо одному из соседних с ним кубиков сетки R_n. Количество таких возможных кубиков не превышает 3^n. Общий их объем равен

$$3^n g^n = (3mK)^n h^n.$$

Но количество всех кубиков $\omega \subset \Delta$ равно $|\Delta|/h^m$, где $|\Delta|$ есть m-мерный объем Δ. Поэтому общий объем покрывающих нашу поверхность S кубиков σ равен

$$(3MK)^n |\Delta| h^{n-m} = ch^{n-m}, \qquad c = (3mK)^n |\Delta|.$$

Мы видим, что при $m < n$ эта величина стремится к нулю при $h \to 0$. Это показывает, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое h, что для него общий n-мерный объем кубиков, покрывающих S будет меньшим, чем $\varepsilon > 0$, и, следовательно, $mS = 0$.

§ 12.6. Понятие кратного интеграла

Определим это понятие в n-мерном случае. Специально в двух- и трехмерном случае оно уже вводилось в § 12.1 схематически.

Пусть $R = R_n$ есть n-мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Omega \subset R_n$ — измеримое (следовательно, ограниченное) множество и на Ω задана функция $f(P)$ $(P \in \Omega)$.

Введем разбиение Ω на частичные множества, т. е. представим Ω в виде суммы

$$\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N \tag{1}$$

конечного числа измеримых в n-мерном смысле по Жордану множеств Ω_j, которые могут попарно пересекаться только по ча-