(замыкании ограниченного m-мерного открытого выпуклого множества), имеет n-мерную меру нуль.

Доказательство. Пусть

$$K \geqslant \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right| \text{ на } \Omega \quad (i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m).$$

Пространство точек $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ обозначим через R_m, а пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — через R_n. Разрежем R_m и R_n прямоугольными сетками на кубики с длинами ребер соответственно h и g. Поместим Ω в куб $\Delta \subset R_m$ с гранями, принадлежащими граням сетки R_m.

Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ есть точка определенного кубика ω сетки R_m и $\mathbf{u}' = (u_1, \ldots, u_m)$ — другая точка этого кубика. Пусть точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ на поверхности S соответствуют при помощи уравнений (3) точкам $u, u' \in \omega$.

На основании теоремы о среднем (см. § 7.13, (12))

$$|x_j' - x_j| = \left| \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_s} \right)_1 (u_s' - u_s) \right| \leqslant Kmh.$$

Здесь $(\quad)_1$ обозначает, что в $(\quad)$ подставлена некоторая промежуточная точка между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$.

Будем считать, что $g = Kmh$.

Тогда, если $\mathbf{x}$ попала в некоторый кубик σ сетки R_n, то точка $\mathbf{x}'$ будет, очевидно, принадлежать либо тому же кубику σ, либо одному из соседних с ним кубиков сетки R_n. Количество таких возможных кубиков не превышает 3^n. Общий их объем равен

$$3^n g^n = (3mK)^n h^n.$$

Но количество всех кубиков $\omega \subset \Delta$ равно $|\Delta|/h^m$, где $|\Delta|$ есть m-мерный объем Δ. Поэтому общий объем покрывающих нашу поверхность S кубиков σ равен

$$(3MK)^n |\Delta| h^{n-m} = ch^{n-m}, \qquad c = (3mK)^n |\Delta|.$$

Мы видим, что при $m < n$ эта величина стремится к нулю при $h \to 0$. Это показывает, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое h, что для него общий n-мерный объем кубиков, покрывающих S будет меньшим, чем $\varepsilon > 0$, и, следовательно, $mS = 0$.

§ 12.6. Понятие кратного интеграла

Определим это понятие в n-мерном случае. Специально в двух- и трехмерном случае оно уже вводилось в § 12.1 схематически.

Пусть $R = R_n$ есть n-мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Omega \subset R_n$ — измеримое (следовательно, ограниченное) множество и на Ω задана функция $f(P)$ $(P \in \Omega)$.

Введем разбиение Ω на частичные множества, т. е. представим Ω в виде суммы

$$\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N \tag{1}$$

конечного числа измеримых в n-мерном смысле по Жордану множеств Ω_j, которые могут попарно пересекаться только по частям своих границ. Различные разбиения Ω мы будем обозначать символами $\rho, \rho^1, \ldots$

В каждом частичном множестве Ω_j $(j = 1, \ldots, N)$ разбиения ρ выберем произвольную точку $P_j \in \Omega_j$ и составим *интегральную сумму* (*по Риману*):

$$S_\rho = S_\rho(f) = \sum_1^N f(P_j)\, m\Omega_j, \tag{2}$$

где $m\Omega_j$ — мера Жордана множества Ω_j.

Надо иметь в виду, что S_ρ зависит от функции f, способа разбиения Ω на части и выбора точек P_j в каждом из частичных множеств Ω_j разбиения.

Обозначим через δ максимальный диаметр множеств Ω_j:

$$\delta = \delta(\rho) = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} d(\Omega_j).$$

По определению предел

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^N f(P_j)\, m\Omega_j = I \tag{3}$$

интегральной суммы f называется *определенным* (*n-кратным*) *интегралом в смысле Римана от функции f по множеству Ω.*

Таким образом, *определенным интегралом от функции f по множеству Ω называют предел, к которому стремится ее интегральная сумма, соответствующая переменному разбиению Ω, когда максимальный диаметр частичных множеств разбиения стремится к нулю* (*независимо от выбора точек $P_j \in \Omega_j$*).

Как обычно в анализе, это определение можно понимать в двух (эквивалентных) смыслах: на языке ε, δ и на языке последовательностей.

На языке ε, δ оно формулируется так:

Интегралом Римана от функции f по множеству Ω называют число I, удовлетворяющее следующему свойству: для всякого $\varepsilon > 0$ должно найтись такое $\delta > 0$, зависящее от ε, что, каково бы ни было разбиение Ω на части Ω_j с диаметрами, меньшими чем δ, и каков бы ни был выбор точек $P_j \in \Omega_j$ $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$, выполняется неравенство:

$$\left| I - \sum_{j=1}^N f(P_j)\, m\Omega_j \right| < \varepsilon. \tag{4}$$

На языке последовательностей оно формулируется так:

Интеграл Римана от функции f по множеству Ω есть предел, к которому стремится любая последовательность интегральных сумм S_{ρ_k} функции f, соответствующих разбиениям ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, со стремящимся к нулю максимальным диаметром

δ_k *частичных множеств:*

$$I = \int_\Omega f\,d\mathbf{x} = \int_\Omega f\,d\Omega = \lim S_{\rho k} \quad (\delta_k \to 0). \tag{5}$$

Сейчас уже заметим, что *если определенная на измеримом множестве Ω функция f ограничена и если для нее при некоторой вполне определенной последовательности разбиений ρ_k существует предел (5), равный I, не зависящий от выбора точек $P_j \in \Omega_j$, то этого, как будет доказано в дальнейшем, достаточно для того, чтобы сказать, что существует интеграл от f на Ω, равный I, т. е. тогда автоматически выполняется равенство* (5), *какова бы ни была последовательность разбиений $\rho_1, \rho_2, \ldots$, для которой $\delta_k \to 0$* (см. § 12.7, теорема 2, 2)).

Напомним, что в § 12.2 (после леммы 5) было показано, что измеримое множество всегда можно разбить на части, имеющие диаметры, меньшие наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Интеграл Римана от функции f по Ω, если он существует, обозначается так:

$$I = \int_\Omega f(P)\,d\Omega = \int_\Omega f(P)\,dP. \tag{6}$$

В этом случае говорят еще, что *f интегрируема по Риману на Ω.*

Высказанное выше условие римановой интегрируемости f на Ω можно выразить еще на языке признака Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, зависящее от ε, что для любых двух разбиений ρ' и ρ'' множества Ω на части с диаметрами частичных множеств, меньшими δ, имеет место неравенство

$$|S_{\rho'} - S_{\rho''}| < \varepsilon.$$

n-кратный интеграл от f на множестве Ω записывают еще так:

$$I = \int \ldots \int_\Omega f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Это обозначение удобно потому, что, как мы увидим в дальнейшем, вычисление кратного интеграла сводится к вычислению соответствующих однократных интегралов в отдельности по x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Если функция $f(P) = A = \mathrm{const}$ на измеримом множестве Ω, то ее интегральная сумма равна числу

$$S_\rho = \sum_{j=1}^{N} Am\Omega_j = Am\Omega,$$

не зависящему от способа разбиения Ω на части. Поэтому

$$\int_\Omega A\,d\Omega = A\int_\Omega d\Omega = Am\Omega. \tag{7}$$

Отметим еще, что если Ω имеет жорданову меру нуль ($m\Omega = 0$), то

$$\int_\Omega f\,d\Omega = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\,m\Omega_j = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} 0 = 0$$

для любой конечной на Ω функции f, даже если она не ограничена. Таким образом, из интегрируемости f на Ω не всегда следует ограниченность f на Ω. *При исследовании функции f, определенной на произвольном измеримом множестве Ω, мы* (см. сноску на стр. 38) *заранее будем предполагать, что она ограничена на Ω.* Впрочем, если Ω — открытое измеримое множество, то *из интегрируемости функции f на Ω следует ограниченность ее на Ω* (см. далее § 12.10).

В будущем, чтобы избежать лишних слов, согласимся, что если про функцию f мы будем говорить, что она интегрируема по Риману на множестве $\Omega \subset R_n$, то этим будет подразумеваться, что Ω есть измеримое в n-мерном смысле по Жордану множество. Это соглашение вполне естественно, так как определение интеграла по Риману на Ω тесно связано с измеримостью Ω по Жордану.

§ 12.7. Верхняя и нижняя интегральные суммы. Основная теорема

Пусть R есть n-мерное пространство. При первом чтении читатель может считать, что $n = 2$ или $n = 3$, но рассуждения и формулировки в этом параграфе вполне аналогичны и при любом натуральном n, в том числе и при $n = 1$.

Пусть задано измеримое (следовательно, ограниченное) по Жордану (в n-мерном смысле) множество Ω, на котором определена ограниченная функция:

$$|f(P)| \leqslant K < \infty \quad (P \in \Omega).$$

Множество Ω может быть разбито на части (измеримые по Жордану и пересекающиеся разве что по своим границам) различными способами. Пусть ρ и ρ' — два такие разбиения:

$$\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N, \quad \Omega = \Omega_1' + \ldots + \Omega_{N'}'.$$

Условимся говорить, что ρ' *есть продолжение* ρ, и писать $\rho \subset \rho'$, если любое частичное множество Ω_k' ($k = 1, \ldots, N'$) разбиения ρ' есть часть одного из частичных множеств Ω_j разбиения ρ. Иначе говоря, разбиение ρ' получается из ρ, если некоторые множества Ω_j разбиения ρ в свою очередь разбить на конечное число частей

$$\Omega_j = \sum_{k=1}^{l_j} \Omega_{jk} \quad (k = 1, \ldots, l_j;\ j = 1, \ldots, N).$$