Отметим еще, что если Ω имеет жорданову меру нуль $(m\Omega = 0)$, то

$$\int_\Omega f\,d\Omega = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\,m\Omega_j = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} 0 = 0$$

для любой конечной на Ω функции f, даже если она не ограничена. Таким образом, из интегрируемости f на Ω не всегда следует ограниченность f на Ω. *При исследовании функции f, определенной на произвольном измеримом множестве Ω, мы* (см. сноску на стр. 38) *заранее будем предполагать, что она ограничена на Ω.* Впрочем, если Ω — открытое измеримое множество, то *из интегрируемости функции f на Ω следует ограниченность ее на Ω* (см. далее § 12.10).

В будущем, чтобы избежать лишних слов, согласимся, что если про функцию f мы будем говорить, что она интегрируема по Риману на множестве $\Omega \subset R_n$, то этим будет подразумеваться, что Ω есть измеримое в n-мерном смысле по Жордану множество. Это соглашение вполне естественно, так как определение интеграла по Риману на Ω тесно связано с измеримостью Ω по Жордану.

§ 12.7. Верхняя и нижняя интегральные суммы. Основная теорема

Пусть R есть n-мерное пространство. При первом чтении читатель может считать, что $n = 2$ или $n = 3$, но рассуждения и формулировки в этом параграфе вполне аналогичны и при любом натуральном n, в том числе и при $n = 1$.

Пусть задано измеримое (следовательно, ограниченное) по Жордану (в n-мерном смысле) множество Ω, на котором определена ограниченная функция:

$$|f(P)| \leqslant K < \infty \quad (P \in \Omega).$$

Множество Ω может быть разбито на части (измеримые по Жордану и пересекающиеся разве что по своим границам) различными способами. Пусть ρ и ρ' — два такие разбиения:

$$\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N, \quad \Omega = \Omega'_1 + \ldots + \Omega'_{N'}.$$

Условимся говорить, что ρ' *есть продолжение* ρ, и писать $\rho \subset \rho'$, если любое частичное множество Ω'_k $(k = 1, \ldots, N')$ разбиения ρ' есть часть одного из частичных множеств Ω_j разбиения ρ. Иначе говоря, разбиение ρ' получается из ρ, если некоторые множества Ω_j разбиения ρ в свою очередь разбить на конечное число частей

$$\Omega_j = \sum_{k=1}^{l_j} \Omega_{jk} \quad (k = 1, \ldots, l_j;\ j = 1, \ldots, N).$$

Таким образом, разбиение ρ' состоит из слагаемых кратной суммы

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l_j} \Omega_{jk} \tag{1}$$

Зададим разбиение ρ. Ему соответствует интегральная сумма функции f

$$S_\rho = \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\, m\Omega_j = \sum_{\rho} f(P_j)\, m\Omega_j$$

($P_j \in \Omega_j$). Мы будем пользоваться как первой, так и второй приведенными записями S_ρ.

Положим

$$M_j = \sup_{P\in\Omega_j} f(P), \quad m_j = \inf_{P\in\Omega_j} j(P),$$

$$\overline{S}_\rho = \sum_\rho M_j m\Omega_j, \quad \underline{S}_\rho = \sum_\rho m_j m\Omega_j.$$

Суммы $\overline{S}_\rho$, $\underline{S}_\rho$ называются соответственно *верхней и нижней интегральными суммами функции* f *(соответствующими разбиению* ρ*)*.

Для произвольной точки $P_j \in \Omega_j$ справедливы неравенства $m_j \leqslant f(P_j) \leqslant M_j$ $(j = 1, \ldots, N)$. Поэтому, учитывая, что $m\Omega_j \geqslant 0$, имеем

$$m_j m\Omega_j \leqslant f(P_j) m\Omega_j \leqslant M_j m\Omega_j,$$

откуда

$$\underline{S}_\rho \leqslant S_\rho \leqslant \overline{S}_\rho. \tag{2}$$

Таким образом, *любая (независимо от выбора точек* P_j*) интегральная сумма функции* f*, соответствующая разбиению* ρ*, находится между ее нижней и верхней интегральными суммами, соответствующими тому же разбиению* ρ.

Другое важное свойство верхних и нижних сумм заключается в том, что если $\rho \subset \rho'$, то имеют место неравенства

$$\underline{S}_\rho \leqslant \underline{S}_{\rho'} \leqslant \overline{S}_{\rho'} \leqslant \overline{S}_\rho. \tag{3}$$

Второе из них уже доказано.

Чтобы убедиться в справедливости, например, третьего неравенства, запишем $\overline{S}_{\rho'}$ в виде

$$\overline{S}_{\rho'} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l_j} M_{jk} m\Omega_{jk},$$

где

$$M_{jk} = \sup_{P\in\Omega_{jk}} f(P).$$

Для сравнения сумму $\overline{S}_\rho$ можно записать подобным образом:

$$\overline{S}_\rho = \sum_{j=1}^{N} M_j m\Omega_j = \sum_{j=1}^{N} M_j \sum_{k=1}^{l_j} m\Omega_{jk} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l_j} M_j m\Omega_{jk}.$$

Теперь ясно, что $\overline{S}_{\rho'} \leqslant \overline{S}_\rho$, потому что из вложения $\Omega_{jk} \subset \Omega_j$ следует что $M_{jk} \leqslant M_j$.

Пусть теперь ρ_1 и ρ_2 — разбиения Ω и $\rho = \rho_1 + \rho_2$ есть новое разбиение, полученное наложением ρ_1 на ρ_2. Тогда ρ есть продолжение ρ_1 и ρ_2 и

$$\underline{S}_{\rho_1} \leqslant \underline{S}_\rho \leqslant \overline{S}_\rho \leqslant \overline{S}_{\rho_2}.$$

Таким образом,

$$\underline{S}_{\rho_1} \leqslant \overline{S}_{\rho_2}, \tag{4}$$

каковы бы ни были разбиения ρ_1 и ρ_2.

Если зафиксировать ρ_2 и менять произвольно ρ_1 (которое мы желаем обозначить через ρ), то получим

$$\underline{I}(f) = \sup_\rho \underline{S}_\rho \leqslant \overline{S}_{\rho_2}.$$

А теперь, варьируя разбиения ρ_2 (обозначаемые через ρ), получим

$$\underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) = \inf_\rho \overline{S}_\rho.$$

Числа $\overline{I}(f) = \overline{I}$ и $\underline{I}(f) = \underline{I}$ называются соответственно *верхним и нижним интегралами функции f на Ω*. Из приведенных рассуждений следует, что *для произвольной ограниченной на Ω функции нижний и верхний интегралы на Ω существуют.*

Докажем важную теорему.

Теорема 1 (основная). *Пусть $\Omega \subset R$ есть измеримое множество (т. е. измеримое в n-мерном смысле по Жордану), на котором определена ограниченная функция $f(|f(x)| \leqslant K)$.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\underline{I} = \overline{I}$;

2) *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение ρ, что*

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho < \varepsilon; \tag{5}$$

3) *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений ρ с диаметрами $d(\Omega_j) < \delta$ имеет место неравенство* (5);

4) *существует интеграл*

$$\int_\Omega f\, d\Omega = I. \tag{6}$$

При этом $I = \underline{I} = \overline{I}$.

Здесь, конечно, подразумевается, что $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — нижний и верхний интегралы от f на G, а $\underline{S}_\rho$, $\overline{S}_\rho$ — нижняя и верхняя интегральные суммы f, соответствующие разбиению ρ.

Эту теорему можно перефразировать так: *для того чтобы существовал интеграл от f на Ω, необходимо и достаточно выполнение одного из условий* 1)—3). *При этом величина интеграла равна* $\underline{I}=\overline{I}$.

Доказательство. 1) → 2). Для любого ε найдутся разбиения ρ_1 и ρ_2 такие, что

$$\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{\rho_1};\quad \overline{S}_{\rho_2}<\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для $\rho=\rho_1+\rho_2$

$$\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{\rho_1}\leqslant\underline{S}_\rho\leqslant\overline{S}_\rho\leqslant\overline{S}_{\rho_2}\leqslant\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда из 1) следует (5), т. е. 2).

2) → 1). Пусть ρ — разбиение, для которого верно (5). Тогда в силу неравенств $\underline{S}_\rho\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}_\rho$ имеет место $\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon$. Но $\varepsilon>0$ как угодно малое число, а $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — определенные числа, не зависящие от ε, поэтому $\underline{I}=\overline{I}$.

4) → 3). Пусть существует интеграл (6). Из определения интеграла следует, что для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для любого разбиения ρ, у которого $d(\Omega_j)<\delta$, имеют место неравенства

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{j=1}^{N}f(P_j)\,|\Omega_j|<I+\frac{\varepsilon}{2},$$

каковы бы ни были точки $P_j\in\Omega_j$. Отсюда, беря верхнюю и нижнюю грани входящей в эти неравенства суммы по $P_j\in\Omega_j$, получим

$$I-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\underline{S}_\rho\leqslant\overline{S}_\rho\leqslant I+\frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно, справедливо 3).

3) → 2) — это тривиально.

2) → 3). Это самая нетривиальная часть теоремы, утверждающая, что если для любого $\varepsilon>0$ найдется зависящее от него разбиение ρ_*:

$$\Omega=\sum_{j=1}^{N}\Omega_j^*,$$

для которого $\overline{S}_{\rho*}-\underline{S}_{\rho*}<\varepsilon$, то также найдется $\delta>0$ такое, что для всех разбиений ρ с $d(\Omega_j)<\delta$ выполняется неравенство (5).

Обозначим через Γ_* объединение всех граничных точек Ω_j^*, каково бы ни было $j = 1, \ldots, N$. Оно имеет меру нуль (Ω_j^* измеримы), и потому можно определить фигуру σ', покрывающую Γ_*, такую, что $|\sigma'| < \varepsilon/2K$. Введем еще новую фигуру σ, содержащую строго внутри себя σ', но такую, что $|\sigma| < \varepsilon/2K$.

Пусть $\delta > 0$ есть настолько малое положительное число, что расстояние между любыми двумя точками границ σ и σ' больше, чем δ. Тем более расстояние любой точки Γ_* до границы σ больше, чем δ.

Зададим какое-нибудь разбиение ρ, на которое наложено единственное условие, что все его частичные множества ω имеют диаметр $d(\omega) < \delta$ (нам удобно будет их писать без индексов, так же как соответствующие им m и M). Имеем

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum{}' (M - m)\, m\omega + \sum{}'' (M - m)\, m\omega,$$

где сумма $\sum'$ распространена на все частичные множества ω разбиения ρ, каждое из которых содержит в себе одну из точек Γ_*. Так как $d(\omega) < \delta$, то все такие $\omega \subset \sigma$ и их общая мера не превышает $m\sigma < \varepsilon/2K$. Поэтому

$$\sum{}' (M - m)\, m\omega \leqslant 2K \sum{}' m\omega \leqslant 2K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Сумму $\sum''$ запишем в виде кратной суммы $\sum'' = \sum\limits_i \sum^i$, где $\sum^i$ обозначает сумму слагаемых $\sum''$, соответствующих частичным множествам ω разбиения ρ, попавшим полностью в частичное множество Ω_i^* старого разбиения ρ_*. Имеем

$$\sum{}'' (M - m)\, m\omega = \sum_i \sum{}^i (M - m)\, m\omega \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*) \sum{}^i m\omega \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*)\, m\Omega_i^* < \varepsilon.$$

Поэтому $\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho < 2\varepsilon$ для всех разбиений ρ с $d(\omega) < \delta$, т. е. имеет место 3).

3) $\to$ 4). Пусть имеет место 3). Тогда, как уже доказано, имеет место и 1). Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, как указано в 3). Тогда для разбиений ρ, о которых говорится в 3),

$$\underline{S}_\rho \leqslant \sum f(P_j)\, |\Omega_j| \leqslant \overline{S}_\rho, \qquad \underline{S}_\rho \leqslant \underline{I} = \overline{I} \leqslant \overline{S}_\rho. \tag{7}$$

Отсюда, полагая $I = \underline{I} = \overline{I}$, получим

$$\left| I - \sum f(P_j)\, |\Omega_j| \right| < \varepsilon, \tag{8}$$

т. е. I есть интеграл от f на Ω. Мы доказали 4).

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть задана последовательность разбиений* ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *измеримого множества* Ω,

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N_k} \Omega_j^k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

со стремящимся к нулю максимальным диаметром δ_k *частичных множеств.*

Если для некоторой ограниченной на Ω *функции* $f(x)$ *выполняется одно из условий*

$$1) \ \lim_{k\to\infty}\left(\overline{S}_{\rho_k}(f) - \underline{S}_{\rho_k}(f)\right) = 0, \tag{10}$$

$$2) \ \lim_{k\to\infty}\sum_j f\left(\xi_j^k\right) m\Omega_j^k = I \qquad \left(\xi_j^k \in \Omega_j^k\right), \tag{11}$$

$$3) \ \lim_{k\to\infty}\underline{S}_{\rho_k}(f) = \lim_{k\to\infty}\overline{S}_{\rho_k}(f) = I, \tag{12}$$

то это влечет существование интеграла от f *на* Ω.

Наоборот, существование интеграла от f *на* Ω *влечет выполнение условий* 1), 2), 3).

Существования одного только из пределов 3) *недостаточно для существования интеграла от* f *на* Ω.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству одномерной теоремы 2 в § 9.4.

Теорема 3. *Пусть задана последовательность разбиений* (9) *измеримого множества* Ω *с* $\delta_{\rho_k} = \max_j d\left(\Omega_j^k\right) \to 0$. *Тогда сумма мер*

$$\sum_j{}' \, m\Omega_j^k = m\Omega^k$$

тех частей разбиения, которые прилегают к границе Γ *области* Ω ($\overline{\Omega}_j^k$ *содержат точки* Γ), *стремится к нулю при* $k \to \infty$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем покрывающую Γ фигуру σ такую, что $|\sigma| < \varepsilon$. Раздадим σ по направлениям всех осей координат, но так, чтобы новая фигура $\sigma' \supset \sigma$ имела меру $|\sigma'| < \varepsilon$. Обозначим через η расстояние между границами σ' и σ. Найдется k_0 такое, что $\delta_{\rho_k} < \eta$ для $k > k_0$. Для таких k частичные множества Ω_j^k, прилегающие к Γ, принадлежат σ', т. е.

$$m\Omega^k = \sum_j{}' \, m\Omega_j^k < |\sigma'| < \varepsilon.$$

Теорема 4. *Определенный интеграл от ограниченной на измеримом множестве* Ω *функции* f *можно определить как предел*

$$\lim_{\delta_{\rho_k}\to 0} \sum_j{}' f\left(P_j^k\right) m\Omega_j^k = \int_\Omega f\,d\mathbf{x}$$

для какой-нибудь (одной!) последовательности разбиений (9) *с* $\delta_{\rho_k} \to 0$, *где интегральные суммы распространены только на частичные множества* Ω_j^k, *не прилегающие к* Γ.

В самом деле, часть интегральной суммы, приходящаяся на частицы Ω_j^k, прилегающие к Γ, оценивается в силу предыдущей теоремы следующим образом:

$$\left|\sum_j{}' f(P_j^k)\, m\Omega_j^k\right| \leqslant K \sum_j{}' m\Omega_j^k \to 0, \qquad k \to 0 \qquad (K > |f(x)|).$$

§ 12.8. Интегрируемость непрерывной функции на замкнутом измеримом множестве. Другие критерии

Теорема 1. *Функция* $f(P)$, *непрерывная на замкнутом измеримом по Жордану множестве* Ω, *интегрируема по Риману на* Ω.

Доказательство. Так как множество Ω измеримо, то оно ограничено. Кроме того, оно замкнуто, поэтому непрерывная на Ω функция f равномерно непрерывна на Ω. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $P', P'' \in \Omega$ и $|P'' - P'| < \delta$, то $|f(P'') - f(P')| < \varepsilon$.

Пусть ρ есть произвольное разбиение $\Omega = \sum_1^N \Omega_j$ на измеримые части с диаметром $d(\Omega_j) < \delta$ и пусть, как всегда, $M_j = \sup_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x})$, $m_j = \inf_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x})$. Тогда

$$M_j - m_j = \sup_{P', P'' \in \Omega_j} [f(P'') - f(P')] \leqslant \varepsilon,$$

потому что расстояние между любыми точками $P', P'' \in \Omega_j$ не превышает по условию δ. Следовательно,

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum (M_j - m_j)\, m\Omega_j \leqslant \varepsilon \sum m\Omega_j = \varepsilon m\Omega = \eta.$$

Так как $\eta > 0$ может быть как угодно малым, то по основной теореме интеграл от f на Ω существует.

Теорема 2. *Функция* f, *ограниченная на измеримом замкнутом множестве* Ω *и непрерывная на* Ω, *за исключением точек, образующих множество* Λ *меры нуль, интегрируема на* Ω.

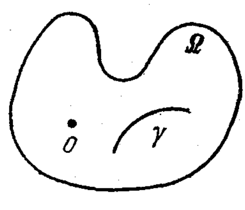

Рис. 12.3.

Например, если функция f ограничена на плоском замкнутом множестве Ω, имеющем гладкую границу (см. рис. 12.3) и, кроме того, непрерывна на Ω, за исключением изолированной точки O и гладкой дуги γ, то f интегрируема на Ω.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\sigma \supset \Lambda$ — открытая (без границы) фигура такая, что $|\sigma| < \varepsilon$. Тогда $\Omega - \sigma$ есть измеримое