для какой-нибудь (одной!) последовательности разбиений (9) *с* $\delta_{\rho_k} \to 0$, *где интегральные суммы распространены только на частичные множества* Ω_j^k, *не прилегающие к* Γ.

В самом деле, часть интегральной суммы, приходящаяся на частицы Ω_j^k, прилегающие к Γ, оценивается в силу предыдущей теоремы следующим образом:

$$\left|\sum_j{}' f(P_j^k)\, m\Omega_j^k\right| \leqslant K \sum_j{}' m\Omega_j^k \to 0, \qquad k \to 0 \qquad (K > |f(x)|).$$

§ 12.8. Интегрируемость непрерывной функции на замкнутом измеримом множестве. Другие критерии

Теорема 1. *Функция* $f(P)$, *непрерывная на замкнутом измеримом по Жордану множестве* Ω, *интегрируема по Риману на* Ω.

Доказательство. Так как множество Ω измеримо, то оно ограничено. Кроме того, оно замкнуто, поэтому непрерывная на Ω функция f равномерно непрерывна на Ω. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $P', P'' \in \Omega$ и $|P'' - P'| < \delta$, то $|f(P'') - f(P')| < \varepsilon$.

Пусть ρ есть произвольное разбиение $\Omega = \sum_1^N \Omega_j$ на измеримые части с диаметром $d(\Omega_j) < \delta$ и пусть, как всегда, $M_j = \sup_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x})$, $m_j = \inf_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x})$. Тогда

$$M_j - m_j = \sup_{P', P'' \in \Omega_j} [f(P'') - f(P')] \leqslant \varepsilon,$$

потому что расстояние между любыми точками P', $P'' \in \Omega_j$ не превышает по условию δ. Следовательно,

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum (M_j - m_j)\, m\Omega_j \leqslant \varepsilon \sum m\Omega_j = \varepsilon m\Omega = \eta.$$

Так как $\eta > 0$ может быть как угодно малым, то по основной теореме интеграл от f на Ω существует.

Теорема 2. *Функция* f, *ограниченная на измеримом замкнутом множестве* Ω *и непрерывная на* Ω, *за исключением точек, образующих множество* Λ *меры нуль, интегрируема на* Ω.

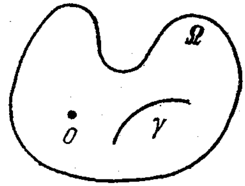

Рис. 12.3.

Например, если функция f ограничена на плоском замкнутом множестве Ω, имеющем гладкую границу (см. рис. 12.3) и, кроме того, непрерывна на Ω, за исключением изолированной точки O и гладкой дуги γ, то f интегрируема на Ω.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\sigma \supset \Lambda$ — открытая (без границы) фигура такая, что $|\sigma| < \varepsilon$. Тогда $\Omega - \sigma$ есть измеримое замкнутое множество, на котором f непрерывна, следовательно, интегрируема. Произведем разбиение ρ' множества $\Omega-\sigma$: $\Omega-\sigma=\Omega_1+\ldots+\Omega_N$ так, чтобы $\overline{S}_{\rho'}-\underline{S}_{\rho'}<\varepsilon$, и определим разбиение ρ множества Ω: $\Omega=\Omega_1+\ldots+\Omega_N+\sigma\Omega$. Положив $M=\sup\limits_{x\in\sigma\Omega} f(\mathbf{x})$, $m=\inf\limits_{x\in\sigma\Omega} f(\mathbf{x})$, получим

$$\overline{S}_\rho-\underline{S}_\rho=(\overline{S}_{\rho'}-\underline{S}_{\rho'})+(M-m)\,m(\sigma\Omega)<\varepsilon+2K\varepsilon=\eta$$
$$(K>|f(\mathbf{x})|,\quad \mathbf{x}\in\Omega),$$

где η может быть как угодно малым. Но тогда согласно свойству 2) основной теоремы f интегрируема на Ω.

Оказывается, что теорему 2 можно обобщить, считая, что множество Λ имеет лебегову меру нуль (вместо жордановой, как мы считали; см. ниже § 12.9).

В такой более общей формулировке теорема 2 становится окончательной, потому что имеет место

Теорема (Лебега). *Для того чтобы ограниченная на измеримом по Жордану замкнутом множестве Ω функция $f(\mathbf{x})$ была интегрируемой на Ω, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной на Ω, за исключением множества точек, имеющих Лебегову меру нуль.*

Пример. Рассмотрим функцию $\psi(x, y)=\sin\dfrac{1}{xy}$ на полуоткрытом прямоугольнике $\Delta'=\{0<x,\ y<\pi/2\}$. Чтобы применить к ней теорему 2, будем рассуждать так. Доопределим ψ на отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ оси x и отрезке $0\leqslant y\leqslant\pi/2$ оси y какими-нибудь значениями, однако ограниченными в совокупности. Продолженная таким образом на замкнутый прямоугольник $\Delta=\overline{\Delta'}$ функция ψ ограничена на Δ и непрерывна всюду на Δ, за исключением множества (состоящего из указанных двух отрезков) жордановой двумерной меры нуль. Но тогда по теореме 2 существует интеграл

$$\iint\limits_{\Delta}\psi(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Delta'}\psi(x, y)\,dx\,dy$$

(см. далее § 12.11, теорема 1 и следствие из нее).

§ 12.9. Множество лебеговой меры нуль *)

Произвольный открытый прямоугольный параллелепипед (прямоугольник)

$$\Delta=\{a_j<x_j<b_j;\quad j=1,\ldots,n\}$$

в n-мерном пространстве R называют еще *интервалом* (*в* R).

*) Сведения, излагаемые в этом параграфе, содержатся в § 19.1.