замкнутое множество, на котором f непрерывна, следовательно, интегрируема. Произведем разбиение ρ' множества $\Omega - \sigma$: $\Omega - \sigma = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N$ так, чтобы $\overline{S}_{\rho'} - \underline{S}_{\rho'} < \varepsilon$, и определим разбиение ρ множества Ω: $\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N + \sigma\Omega$. Положив $M = \sup\limits_{x \in \sigma\Omega} f(\mathbf{x})$, $m = \inf\limits_{x \in \sigma\Omega} f(\mathbf{x})$, получим

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = (\overline{S}_{\rho'} - \underline{S}_{\rho'}) + (M - m)\, m(\sigma\Omega) < \varepsilon + 2K\varepsilon = \eta$$
$$(K > |f(\mathbf{x})|, \quad \mathbf{x} \in \Omega),$$

где η может быть как угодно малым. Но тогда согласно свойству 2) основной теоремы f интегрируема на Ω.

Оказывается, что теорему 2 можно обобщить, считая, что множество Λ имеет лебегову меру нуль (вместо жордановой, как мы считали; см. ниже § 12.9).

В такой более общей формулировке теорема 2 становится окончательной, потому что имеет место

Теорема (Лебега). *Для того чтобы ограниченная на измеримом по Жордану замкнутом множестве Ω функция $f(\mathbf{x})$ была интегрируемой на Ω, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной на Ω, за исключением множества точек, имеющих Лебегову меру нуль.*

Пример. Рассмотрим функцию $\psi(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$ на полуоткрытом прямоугольнике $\Delta' = \{0 < x,\ y < \pi/2\}$. Чтобы применить к ней теорему 2, будем рассуждать так. Доопределим ψ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ оси x и отрезке $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$ оси y какими-нибудь значениями, однако ограниченными в совокупности. Продолженная таким образом на замкнутый прямоугольник $\Delta = \overline{\Delta'}$ функция ψ ограничена на Δ и непрерывна всюду на Δ, за исключением множества (состоящего из указанных двух отрезков) жордановой двумерной меры нуль. Но тогда по теореме 2 существует интеграл

$$\iint\limits_{\Delta} \psi(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Delta'} \psi(x, y)\, dx\, dy$$

(см. далее § 12.11, теорема 1 и следствие из нее).

§ 12.9. Множество лебеговой меры нуль *)

Произвольный открытый прямоугольный параллелепипед (прямоугольник)

$$\Delta = \{a_j < x_j < b_j; \quad j = 1, \ldots, n\}$$

в n-мерном пространстве R называют еще *интервалом* (*в* R).

*) Сведения, излагаемые в этом параграфе, содержатся в § 19.1.

Объем (n-мерная мера) Δ равен

$$|\Delta| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j),$$

потому что замкнутый прямоугольник отличается от соответствующего открытого на множество меры (n-мерной) нуль.

По определению множество E *имеет лебегову меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное или счетное число интервалов $\Delta^1, \Delta^2, \ldots$, покрывающих E $\left(E \subset \sum \Delta^k\right)$, сумма объемов которых меньше ε: $\sum |\Delta^k| < \varepsilon$.

Лемма 1. *Сумма конечного или счетного числа множеств $E^1, E^2, \ldots$, каждое из которых имеет лебегову меру нуль, имеет в свою очередь лебегову меру нуль.*

В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$ и покроем наши множества следующим образом: E^k покроем счетной (или конечной) системой интервалов Δ_j^k, $E^k \subset \sum_j \Delta_j^k$ таких, что $\sum_j |\Delta_j^k| < \varepsilon/2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Так как интервалы Δ_j^k $(j, k = 1, 2, \ldots)$ можно заново перенумеровать и все они покрывают $E = \sum E^k$ и сумма их объемов меньше $\varepsilon = \sum_k (\varepsilon/2^k)$, то в силу произвольности ε множество E имеет лебегову меру нуль.

Если множество E имеет жорданову меру нуль, то это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным числом интервалов с общим объемом, меньшим чем ε. Следовательно, E имеет также лебегову меру нуль. Этим объясняется, что мы пользуемся одним и тем же обозначением ($mE = 0$) для жордановой и лебеговой меры. Впрочем, мы определили здесь только весьма частный случай меры Лебега, именно меры Лебега нуль.

Следует, однако, отметить, что множество может иметь лебегову меру нуль и в то же время не быть измеримым по Жордану. Например, множество рациональных чисел, содержащихся в отрезке $[0, 1]$, имеет лебегову меру нуль, так как оно счетно. Но оно не измеримо (в одномерном смысле) по Жордану — верхняя жорданова его мера равна 1, а нижняя — нулю.

Отметим, что если множество F замкнуто, ограничено и имеет лебегову меру нуль, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать счетную систему покрывающих F интервалов, общий объем которых меньше, чем $\varepsilon > 0$. Но согласно лемме Бореля в силу ограниченности и замкнутости F в этом покрытии можно оставить конечное число интервалов, все же покрывающих F. Их общий объем тем более меньше, чем ε. Но тогда F измеримо по Жордану. Мы доказали следующую лемму:

Лемма 2. *Замкнутое ограниченное можество лебеговой меры нуль измеримо по Жордану и имеет, таким образом, жорданову меру нуль.*