§ 12.10. Доказательство теоремы Лебега. Интегрируемость и ограниченность функции

В § 7.10 было введено понятие колебания $\omega(\mathbf{x})$ $(\omega(\mathbf{x}) \geqslant 0)$ функции f на множестве Ω в точке $x \in \Omega$ и замечено, что (§ 7.10, теорема 5) функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда ее колебание в этой точке равно нулю $(\omega(\mathbf{x}) = 0)$. Таким образом, в точке разрыва функции ее колебание — заведомо положительная величина. Обозначим через E_λ множество всех точек $x \in \Omega$, где колебание f не менее $\lambda > 0$ $(\omega(\mathbf{x}) \geqslant \lambda)$. Важно отметить, что если Ω — замкнутое множество, то E_λ — множество, замкнутое при любом λ (см. § 7.10, теорема 6).

Доказательство достаточности условия теоремы. Пусть функция f ограничена на замкнутом измеримом множестве Ω,

$$|f(\mathbf{x})| \leqslant K \qquad (\mathbf{x} \in \Omega), \tag{1}$$

и множество E ее точек разрыва имеет лебегову меру нуль $(E \subset \Omega)$.

Будем предполагать, что $m\Omega > 0$, иначе утверждение тривиально. Зададим $\varepsilon > 0$, и пусть $\lambda > 0$ удовлетворяет неравенству $4\lambda m\Omega < \varepsilon$.

Так как лебегова мера $mE = 0$, то и лебегова мера $mE_\lambda = 0$ при любом $\lambda > 0$. Но E_λ замкнуто и ограничено, поэтому и жорданова мера $mE_\lambda = 0$. Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать покрывающее E_λ множество G, представляющее собой конечную систему интервалов меры $|G| < \varepsilon/4K$. G есть открытое измеримое множество, и так как множество Ω замкнуто и ограничено, то Ω можно записать в виде суммы непересекающихся измеримых по Жордану множеств $\Omega = \Omega_1 + \Omega''$, где $\Omega_1 = G\Omega$, $\Omega'' = \Omega - G$, $m\Omega_1 \leqslant |G| < \varepsilon/4K$ и Ω'' к тому же — замкнутое ограниченное множество. Во всех точках Ω'' наша функция имеет колебание, меньшее, чем λ. Но тогда, согласно теореме 3 § 7.10, можно указать такое $\delta > 0$, что каковы бы ни были точки P, $P' \in \Omega''$, такие, что $|P - P'| < \delta$, имеет место $|f(P) - f(P')| < 2\lambda$. Произведем разбиение Ω'' на части $\Omega'' = \sum_{2}^{N} \Omega_j$ диаметра, меньшего, чем число δ. Эти части вместе с уже определенным выше множеством Ω_1 образуют разбиение ρ всего множества Ω. Для него, очевидно, имеют место оценки

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = (M_1 - m_1)\, m\Omega_1 + \sum_{j=2}^{N} (M_j - m_j)\, m\Omega_j \leqslant$$

$$\leqslant 2K \frac{\varepsilon}{4K} + 2\lambda \sum_{j=2}^{N} m\Omega_j < \frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda m\Omega < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности ε на основании основной теоремы функция f интегрируема на Ω.

Доказательство необходимости условия теоремы. Пусть функция f ограничена на замкнутом измеримом множестве Ω и интегрируема на нем. Тогда, согласно основной теореме, для любых $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ можно указать такое разбиение ρ множества Ω, что (пояснения ниже)

$$\varepsilon\lambda > \overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum (M_j - m_j)\, m\Omega_j > \sum{}' (M_j - m_j)\, m\Omega_j \geqslant \lambda \sum{}' m\Omega_j. \tag{2}$$

Сумма $\sum'$ распространена только на те слагаемые, которые соответствуют множествам Ω_j, содержащим в себе хотя бы одну внутреннюю точку P из E_λ. Такую точку можно покрыть принадлежащим к Ω_j шаром V_δ с центром в ней, и поэтому выполняются неравенства

$$M_j - m_j \geqslant M_\delta - m_\delta \geqslant \omega(P) \geqslant \lambda, \quad M_\delta = \sup_{\mathbf{x}\in V_\delta} f(\mathbf{x}), \quad m_\delta = \inf_{\mathbf{x}\in V_\delta} f(\mathbf{x}).$$

Из (2) после сокращения на λ получим неравенства

$$\varepsilon > \sum{}' m\Omega_j = m\left(\sum{}' \Omega_j\right),$$

где $\sum{}' \Omega_j$ содержит в себе точки E_λ, каждая из которых — внутренняя по отношению к какому-нибудь из множеств Ω_j разбиения ρ. Остальные точки E_λ, не попавшие в $\sum{}' \Omega_j$, могут оказаться только на границах множеств Ω_j $(j = 1, \ldots, N)$, имеющих общую меру нуль. Таким образом, для любых $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$ $mE_\lambda < \varepsilon$, т. е. $mE_\lambda = 0$. Но множество всех точек разрыва f можно записать в виде

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_{1/k},$$

и так как $mE_{1/k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то и $mE = 0$.

Необходимость условия теоремы доказана.

Введем следующее полезное определение. Будем говорить, что множество $\Omega \subset R$ *удовлетворяет свойству* (A), если оно измеримо и если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать разбиение $\Omega = \sum_k^N \Omega_j$ на измеримые части положительной меры $(m\Omega > 0)$ с диаметром $d(\Omega_j) < \varepsilon$.

Произвольное открытое измеримое множество Ω обладает свойством (A).

В самом деле, прямоугольная сетка с кубиками Δ диаметра, меньшего $\varepsilon > 0$, разрезает Ω на непустые измеримые части Ω_j. Пусть Ω_j есть часть Δ, $x^0 \subset \Omega_j \subset \Omega$, тогда найдется шар V_{x^0} с центром в $\mathbf{x}^0$, содержащийся в Ω, и пересечение $V_{\mathbf{x}^0}\Delta \subset \Omega_j$. Но легко видеть, что мера $m\left(V_{\mathbf{x}^0}\Delta\right) > 0$.

Конечно, вместе с открытым измеримым множеством Ω обладает свойством (A) и его замыкание $\overline{\Omega}$.

Прямоугольник, круг, эллипс (точнее, его внутренность) — все это примеры двумерных множеств, обладающих свойством (A). Примерами одномерных множеств со свойством (A) могут служить отрезок, конечная система отрезков, интервал, а примерами трехмерных множеств со свойством (A) — шар, куб, фигура, эллипсоид, тор.

С другой стороны, плоское множество Ω, изображенное на рис. 12.4, состоящее из круга σ и отрезка $[0, 2]$ на оси x, не обладает свойством (A). Оно измеримо, потому что его граница состоит из конечного числа гладких кусков. Однако, например, при $\varepsilon < 1/2$ нельзя Ω разбить на измеримые (в двухмерном смысле) части положительной меры с диаметром, меньшим чем ε.

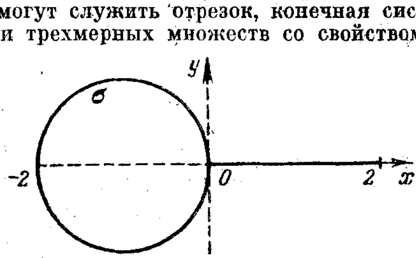

Рис. 12.4.

Теорема 1. *Функция f, интегрируемая на множестве Ω со свойством (A), ограничена на Ω.*

В самом деле, зададим $\delta > 0$ и возьмем разбиение ρ множества Ω на части Ω_j $(j = 1, \ldots, N)$ положительной меры с $\delta_\rho = \max_j d(\Omega_j) < \delta$. Пусть функция f неограничена на Ω; тогда она неограничена по крайней мере на одном из множеств Ω_j — пусть на Ω_1. Соответствующую интегральную сумму запишем в виде

$$S_\rho = f(p_1)\, m\Omega_1 + \sum_{j=2}^{N} f(p_j)\, m\Omega_j. \tag{3}$$

При данном ρ и фиксированных p_j ($j = 2, \ldots, n-1$) сумма $\sum\limits_{j=2}^{N} f(p_j)\, m\Omega_j$ постоянна, а величина $f(p_1) m\Omega_1$ при произвольном изменении p_1 в пределах Ω_1 не ограничена (ведь $m\Omega_1 > 0$). Но тогда интегральная сумма S_ρ не ограничена. Это показывает, что S_ρ для указанных ρ и $\delta_\rho \to 0$ (при любых $p_j \in \Omega_j$!) не может стремиться ни к какому конечному пределу, и, следовательно, наша функция f не интегрируема на Ω (ср. с теоремой 1 § 9.2).

Для множеств, обладающих свойством (A), теорему Лебега можно, очевидно, сформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Пусть Ω есть замкнутое множество, обладающее свойством (A). Для того чтобы определенная на Ω функция f была интегрируемой на Ω, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на Ω и непрерывной на Ω, за исключением точек множества лебеговой меры нуль.*

§ 12.11. Свойства кратных интегралов

Теорема 1. *Если функция f ограничена и интегрируема на $\Omega = \Omega' + \Omega''$, где Ω' и Ω'' измеримы и пересекаются разве что по своим границам, то она также интегрируема на Ω' и Ω'', и наоборот. При этом *)*

$$\int\limits_{\Omega} f\, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega'} f\, d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega''} f\, d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Берем произвольную последовательность разбиений ρ_k ($k = 1, 2, \ldots$) множества Ω, содержащих в себе границы Ω' и Ω''. Они индуцируют на Ω', Ω'' разбиения ρ_k' и ρ_k''. Дальше надо рассуждать в точности так же, как при доказательстве одномерной теоремы 1 из § 9.7, только теперь роль отрезков $[a, c]$, $[c, b]$ играют множества Ω' и Ω''.

Следствие. *Если ограниченную и интегрируемую на Ω функцию f видоизменить на любом множестве $E \subset \Omega$, имеющем жорданову меру нуль, так что видоизмененная функция f_1 останется ограниченной на Ω, то f_1 будет интегрируемой на Ω и*

$$\int\limits_{\Omega} f\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f_1\, d\Omega.$$

---

*) Для неограниченных f равенство (1) может нарушиться. Например, если $f = 0$ на σ (рис. 12.4) и $f = x^{-1}$ на полуинтервале $\gamma = (0, 2]$ оси x, то $\int\limits_{\sigma}\int f\, dx\, dy = \int\limits_{\gamma}\int f\, dx\, dy = 0$. Но $\int\limits_{\sigma+\gamma}\int f\, dx\, dy$ не существует.