функция f неограничена на Ω; тогда она неограничена по крайней мере на одном из множеств Ω_j — пусть на Ω_1. Соответствующую интегральную сумму запишем в виде

$$S_\rho = f(p_1)\, m\Omega_1 + \sum_{j=2}^{N} f(p_j)\, m\Omega_j. \tag{3}$$

При данном ρ и фиксированных p_j ($j = 2, \ldots, n-1$) сумма $\sum\limits_{j=2}^{N} f(p_j)\, m\Omega_j$ постоянна, а величина $f(p_1)m\Omega_1$ при произвольном изменении p_1 в пределах Ω_1 не ограничена (ведь $m\Omega_1 > 0$). Но тогда интегральная сумма S_ρ не ограничена. Это показывает, что S_ρ для указанных ρ и $\delta_\rho \to 0$ (при любых $p_j \in \Omega_j$!) не может стремиться ни к какому конечному пределу, и, следовательно, наша функция f не интегрируема на Ω (ср. с теоремой 1 § 9.2).

Для множеств, обладающих свойством (A), теорему Лебега можно, очевидно, сформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Пусть Ω есть замкнутое множество, обладающее свойством (A). Для того чтобы определенная на Ω функция f была интегрируемой на Ω, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на Ω и непрерывной на Ω, за исключением точек множества лебеговой меры нуль.*

§ 12.11. Свойства кратных интегралов

Теорема 1. *Если функция f ограничена и интегрируема на $\Omega = \Omega' + \Omega''$, где Ω' и Ω'' измеримы и пересекаются разве что по своим границам, то она также интегрируема на Ω' и Ω'', и наоборот. При этом* *)

$$\int_{\Omega} f\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega'} f\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega''} f\, d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Берем произвольную последовательность разбиений ρ_k ($k = 1, 2, \ldots$) множества Ω, содержащих в себе границы Ω' и Ω''. Они индуцируют на Ω', Ω'' разбиения ρ_k' и ρ_k''. Дальше надо рассуждать в точности так же, как при доказательстве одномерной теоремы 1 из § 9.7, только теперь роль отрезков $[a, c]$, $[c, b]$ играют множества Ω' и Ω''.

Следствие. *Если ограниченную и интегрируемую на Ω функцию f видоизменить на любом множестве $E \subset \Omega$, имеющем жорданову меру нуль, так что видоизмененная функция f_1 останется ограниченной на Ω, то f_1 будет интегрируемой на Ω и*

$$\int_{\Omega} f\, d\Omega = \int_{\Omega} f_1\, d\Omega.$$

*) Для неограниченных f равенство (1) может нарушиться. Например, если $f = 0$ на σ (рис. 12.4) и $f = x^{-1}$ на полуинтервале $\gamma = (0, 2]$ оси x, то $\iint\limits_{\sigma} f\,dx\,dy = \iint\limits_{\gamma} f\,dx\,dy = 0$. Но $\iint\limits_{\sigma+\gamma} f\,dx\,dy$ не существует.

В самом деле, $\Omega - E$ измеримо вместе с Ω, поэтому f интегрируема на $\Omega - E$, кроме того,

$$\int_E f\,d\Omega = \int_E f_1\,d\Omega = 0.$$

Но тогда f_1 интегрируема на Ω и

$$\int_\Omega f_1\,d\Omega = \int_{\Omega-E} f_1\,d\Omega + \int_E f_1\,d\Omega = \int_{\Omega-E} f\,d\Omega + \int_E f\,d\Omega = \int_\Omega f\,d\Omega.$$

В силу этого утверждения, если функция f ограничена на незамкнутом измеримом множестве Ω и интегрируема на нем, то *пишут*

$$\int_\Omega f\,d\mathbf{x} = \int_{\overline{\Omega}} f\,d\mathbf{x},$$

хотя функция f могла не быть определенной на $\overline{\Omega} - \Omega$. Ведь все равно, если бы f была определена на $\overline{\Omega} - \Omega$ так, что совокупность ее значений на $\overline{\Omega} - \Omega$ ограничена, то интегралы от f на Ω и $\overline{\Omega}$ совпадают.

Теорема 2. *Если $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ — ограниченные интегрируемые на Ω функции и c — постоянная, то функции*

1) $f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})$, 2) $cf(\mathbf{x})$, 3) $|f(\mathbf{x})|$, 4) $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$, 5) $1/f(\mathbf{x})$,

где $|f(\mathbf{x})| > d > 0$, интегрируемы на Ω. При этом

$$\int_\Omega (f \pm \varphi)\,d\mathbf{x} = \int_\Omega f\,d\mathbf{x} \pm \int_\Omega \varphi\,d\mathbf{x}, \tag{2}$$

$$\int_\Omega cf\,d\mathbf{x} = c\int_\Omega f\,d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Заметим, что факт интегрируемости указанных функций непосредственно следует из теоремы Лебега, если принять во внимание, что лебегова мера суммы двух множеств, имеющих лебегову меру нуль, очевидно, в свою очередь равна нулю.

Равенства (2) и (3) доказываются вполне аналогично тому, как это делалось в теореме 2 § 9.7. Существование интегралов от функций 1)—5) можно доказать и не прибегая к теореме Лебега, аналогично тому, как это было сделано в указанной одномерной теореме.

Теорема 3. *Если функции f_1, f_2 и φ ограничены и интегрируемы на Ω и*

$$f_1(P) \leqslant f_2(P),\quad \varphi(P) \geqslant 0 \quad (P \in \Omega), \tag{4}$$

то

$$\int_\Omega f_1\varphi\,dP \leqslant \int_\Omega f_2\varphi\,dP. \tag{5}$$

В частности, если

$$A \leqslant f(P) \leqslant B, \quad \varphi(P) \geqslant 0, \tag{6}$$

где A и B — постоянные, то

$$A \int_\Omega \varphi\, dP \leqslant \int_\Omega f\varphi\, dP \leqslant B \int_\Omega \varphi\, dP, \tag{7}$$

и при некотором C

$$\int_\Omega f\varphi\, dP = C \int_\Omega \varphi\, dP \quad (A \leqslant C \leqslant B). \tag{8}$$

Доказательство. Из (4) следует, что

$$f_1(P)\varphi(P) \leqslant f_2(P)\varphi(P) \qquad (P \in \Omega),$$

откуда для любого разбиения ρ множества Ω

$$S_\rho(f_1\varphi) \leqslant S_\rho(f_2\varphi).$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, где δ — максимальный диаметр частичных множеств разбиения ρ, получим (5).

Равенство (8) называют *теоремой о среднем для кратного интеграла.*

Примечание. Если Ω — связное измеримое замкнутое множество и функция f непрерывна на Ω, то

$$\int_\Omega f\varphi\, dP = f(Q) \int_\Omega \varphi\, dP,$$

где Q — некоторая точка Ω.

В самом деле, из непрерывности f на замкнутом измеримом множестве Ω следует, что f интегрируема на Ω, кроме того, существуют на Ω точки Q_1 и Q_2, в которых f достигает соответственно минимума и максимума (на Ω):

$$\min_{P \in \Omega} f(P) = f(Q_1) = A, \qquad \max_{P \in \Omega} f(P) = f(Q_2) = B.$$

В силу связности Ω существует находящаяся в Ω непрерывная кривая $P = P(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, соединяющая точки $Q_1 = P(t_1)$ и $Q_2 = P(t_2)$. Непрерывная на отрезке $[t_1, t_2]$ функция

$$z = f(P(t)) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = \psi(t) \qquad [t_1 \leqslant t \leqslant t_2]$$

принимает для некоторого $t_0 \in [t_1, t_2]$ значение $\psi(t_0) = f(Q) = C$, где $Q = P(t_0)$.

Теорема 4. *Для ограниченной интегрируемой на Ω функции f выполняются неравенства*

$$\left| \int_\Omega f\, d\mathbf{x} \right| \leqslant \int_\Omega |f|\, d\mathbf{x} \leqslant K m\Omega \qquad \left(K = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|\right). \tag{9}$$

В самом деле, интегрируемость $|f|$ доказана в теореме 2. Кроме того,

$$-|f(\mathbf{x})| \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant |f(\mathbf{x})| \qquad (\mathbf{x} \in \Omega),$$

откуда

$$-\int_\Omega |f|\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega f\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mathbf{x}.$$

Отметим, что в неравенстве (9) недостаточно предполагать интегрируемость $|f(\mathbf{x})|$ (см. замечание в конце § 9.7).

§ 12.12. Сведение кратного интеграла к интегралам по отдельным переменным

На основании доказываемых ниже теорем вычисление кратного интеграла сводится к последовательному интегрированию по отдельным переменным $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Теорема 1. *Пусть в плоскости переменных (u, v) задан прямоугольник $\Delta = \{a \leqslant u \leqslant b;\ c \leqslant v \leqslant d\} = [a, b] \times [c, d]$, и функция $f(u, v)$ ограничена и интегрируема на нем. Тогда имеют место равенства*

$$\iint_\Delta f(u, v)\,du\,dv = \int_a^b du\left(\int_c^d f(u, v)\,dv\right) = \int_c^d dv\left(\int_a^b f(u, v)\,du\right), \tag{1}$$

где выражение

$$\int_c^d f(u, v)\,dv \tag{2}$$

надо понимать как интеграл Римана по v при фиксированном u если он существует, если же он не существует,— то как произвольное число, находящееся между нижним и верхним интегралами функции $f(u, v)$ по $v \in [c, d]$. Интеграл по u на $[a, b]$ во втором члене в (1) существует в смысле Римана.

Если читатель ознакомился с § 12.10, то он знает, что прямоугольник Δ есть множество, удовлетворяющее свойству (A), и следовательно, на самом деле из интегрируемости f на Δ следует ее ограниченность на Δ.

Если не только существует кратный интеграл от f по Δ, но и существует интеграл (2) при любом u, то второй член в цепи (1) надо понимать как результат риманова интегрирования f сначала по v, а затем по u.

Аналогичное утверждение имеет место для третьего члена цепи (1).

Доказательство. Для любого $u \in [a, b]$ будем рассматривать $f(u, v)$ как функцию от v на $[c, d]$. Она ограничена, и следовательно, для нее существуют нижний и верхний интегралы $\underline{I}(u) \leqslant \overline{I}(u)$ $(a \leqslant u \leqslant b)$. Пусть $\Phi(u)$ — какая-либо функция, удов-