В самом деле, интегрируемость $|f|$ доказана в теореме 2. Кроме того,

$$-|f(\mathbf{x})| \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant |f(\mathbf{x})| \qquad (\mathbf{x} \in \Omega),$$

откуда

$$-\int_\Omega |f|\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega f\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mathbf{x}.$$

Отметим, что в неравенстве (9) недостаточно предполагать интегрируемость $|f(\mathbf{x})|$ (см. замечание в конце § 9.7).

§ 12.12. Сведение кратного интеграла к интегралам по отдельным переменным

На основании доказываемых ниже теорем вычисление кратного интеграла сводится к последовательному интегрированию по отдельным переменным $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Теорема 1. *Пусть в плоскости переменных (u, v) задан прямоугольник $\Delta = \{a \leqslant u \leqslant b;\ c \leqslant v \leqslant d\} = [a, b] \times [c, d]$, и функция $f(u, v)$ ограничена и интегрируема на нем. Тогда имеют место равенства*

$$\iint_\Delta f(u, v)\,du\,dv = \int_a^b du\left(\int_c^d f(u, v)\,dv\right) = \int_c^d dv\left(\int_a^b f(u, v)\,du\right), \qquad (1)$$

где выражение

$$\int_c^d f(u, v)\,dv \qquad (2)$$

надо понимать как интеграл Римана по v при фиксированном u если он существует, если же он не существует,— то как произвольное число, находящееся между нижним и верхним интегралами функции $f(u, v)$ по $v \in [c, d]$. Интеграл по u на $[a, b]$ во втором члене в (1) существует в смысле Римана.

Если читатель ознакомился с § 12.10, то он знает, что прямоугольник Δ есть множество, удовлетворяющее свойству (A), и следовательно, на самом деле из интегрируемости f на Δ следует ее ограниченность на Δ.

Если не только существует кратный интеграл от f по Δ, но и существует интеграл (2) при любом u, то второй член в цепи (1) надо понимать как результат риманова интегрирования f сначала по v, а затем по u.

Аналогичное утверждение имеет место для третьего члена цепи (1).

Доказательство. Для любого $u \in [a, b]$ будем рассматривать $f(u, v)$ как функцию от v на $[c, d]$. Она ограничена, и следовательно, для нее существуют нижний и верхний интегралы $\underline{I}(u) \leqslant \overline{I}(u)$ $(a \leqslant u \leqslant b)$. Пусть $\Phi(u)$ — какая-либо функция, удовлетворяющая неравенствам $\underline{I}(u) \leqslant \Phi(u) \leqslant \overline{I}(u)$ $(a \leqslant u \leqslant b)$. Надо доказать, что $\Phi(u)$ интегрируема на $[a, b]$ и имеет интеграл, равный кратному интегралу от f по Δ. Для этого достаточно (см. теорему 2 § 9.4) произвести разбиение r отрезка $[a, b]$ на равные части $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = b$, $h = u_i - u_{i-1} = (b-a)/N$ и показать существование предела

$$\lim_{h \to 0} S_r(\Phi) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Phi(\xi_i) h = \int_a^b \Phi(u)\,du = \iint_{\Delta} f\,du\,dv \tag{3}$$

при любом выборе $\xi_i \subset [u_{i-1}, u_i]$ $(j = 1, \ldots, N)$.

Разделим еще отрезок $[c, d]$ на N равных частей $c = v_0 < v_1 < \ldots < v_N = d$, $k = v_j - v_{j-1} = (d-c)/N$ разбиением ρ. Это приводит к разбиению прямоугольника Δ на равные прямоугольники $\Delta_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ и к верхней и нижней суммам f на Δ:

$$\overline{S}_{r \times \rho}(f) = hk \sum_i \sum_j M_{ij}, \quad \underline{S}_{r \times \rho}(f) = hk \sum_i \sum_j m_{ij}.$$

Так как

$$\Phi(\xi_i) \leqslant \overline{I}(\xi_i) \leqslant k \sum_j \sup_{v_{j-1} \leqslant v \leqslant v_j} f(\xi_i, v) \leqslant k \sum_j M_{ij},$$

и аналогично

$$\Phi(\xi_i) \geqslant k \sum_j m_{ij},$$

то

$$\underline{S}_{r \times \rho}(f) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \Phi(\xi_i) h \leqslant \overline{S}_{r \times \rho}(f).$$

Но по условию f интегрируема на Δ, поэтому существуют пределы

$$\lim_{N \to \infty} \underline{S}_{r \times \rho}(f) = \lim_{N \to \infty} \overline{S}_{r \times \rho}(f) = \int_{\Delta} f\,du\,dv.$$

Поэтому существует предел (3), и мы доказали первое равенство (1). Второе доказывается аналогично.

Рассмотрим теперь n-мерный прямоугольник $\Delta = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 1, \ldots, n\}$. Обозначим через Δ' проекцию Δ на координатное подпространство точек $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_m)$: $\Delta' = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 1, \ldots, m\}$ $(1 \leqslant m < n)$, и через Δ'' — проекцию Δ на координатное подпространство точек $\mathbf{v} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$: $\Delta'' = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = m+1, \ldots, n\}$. Будем писать

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \Delta = \Delta' \times \Delta''.$$

Имеет место теорема, обобщающая теорему 1:

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *интегрируема на прямоугольнике* $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ $(\mathbf{u} \in \Delta',\ \mathbf{v} \in \Delta'')$. *Тогда* *справедливо равенство*

$$\iint_{\Delta} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\mathbf{u}\, d\mathbf{v} = \int_{\Delta'} d\mathbf{u} \int_{\Delta''} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}, \tag{4}$$

где выражение $\int_{\Delta''} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}$ *надо понимать как интеграл Римана по* $\mathbf{v}$ *при фиксированном* $\mathbf{u}$ *или, если он не существует, как произвольное число между нижним и верхним интегралом от* $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *по* $\mathbf{v} \in \Delta''$. *Интеграл по* $\mathbf{u}$ *на* Δ' *в правой части* (4) *существует в смысле Римана. Если, в частности, кроме условия теоремы, известно, что функция* $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *интегрируема по* $\mathbf{v} \in \Delta''$ *для любого* $\mathbf{u} \in \Delta'$, *то правая часть* (4) *без всяких оговорок есть результат последовательного интегрирования* f *по Риману сначала по* $\mathbf{v} \in \Delta''$, *а затем по* $\mathbf{u} \in \Delta'$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1. Производится разбиение r (m-мерного) прямоугольника Δ' на N^m равных прямоугольников Δ_1', Δ_2', ... с m-мерными мерами

$$h = |\Delta_i'|^m = h_1 \dots h_m = \frac{(b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m)}{N^m}$$

и разбиение $(n-m)$-мерного прямоугольника Δ'' на N^{n-m} равных прямоугольников Δ_1'', Δ_2'', ... с $(n-m)$-мерными мерами

$$g = |\Delta_j''|^{n-m} = h_{m+1} \dots h_n = \frac{(b_{m+1} - a_{m+1}) \dots (b_n - a_n)}{N^{n-m}}.$$

В результате естественным образом получается разбиение $r \times \rho$

$$\Delta = \sum_i \sum_j \Delta_i' \times \Delta_j''.$$

Ему соответствуют верхняя и нижняя суммы $\overline{S}_{r\times\rho}(f) = hg \sum_i \sum_j M_{ij}$, $\underline{S}_{r\times\rho}(f) = hg \sum_i \sum_j m_{ij}$.

Функция $\Phi(\mathbf{u})$ определяется как любая функция, удовлетворяющая неравенствам $\underline{I}(\mathbf{u}) \leqslant \Phi(\mathbf{u}) \leqslant \overline{I}(\mathbf{u})$, где $\underline{I}(\mathbf{u})$ и $\overline{I}(\mathbf{u})$ — нижний и верхний интегралы от $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ по $\mathbf{v} \in \Delta''$.

Дальше мы должны рассуждать, как при доказательстве предыдущей теоремы, заменяя там $\xi_i \in [u_{i-1}, u_i]$ на $\xi_i' \in \Delta_i'$.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ *не только интегрируема на прямоугольнике* Δ, *но каково бы ни было натуральное* $k = 1, \dots, n-1$ *и при любых допустимых* $(x_1, \dots, x_k)$ *она интегрируема по* Δ^k — *проекции* Δ *на подпространство*

$\mathbf{u}^k = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. *Тогда имеет место равенство* ($\Delta = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j\}$)

$$\int\limits_\Delta \ldots \int f\,dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n,$$

где интегралы в правой части понимаются в смысле Римана.

В самом деле, применяя предыдущую теорему последовательно, получим

$$\int\limits_\Delta f\,d\mathbf{x} = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{\Delta'} f(x_1, \mathbf{u}^1)\,d\mathbf{u}' = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{\Delta^2} f(x, x_2, \mathbf{u}^2)\,d\mathbf{u}^2 = \ldots$$
$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n. \quad (5)$$

В общем случае сведение вычисления кратных интегралов к последовательному интегрированию по каждой переменной в отдельности основывается на лемме, доказываемой ниже.

Пусть Ω — ограниченное множество. Обозначим через e_1 его проекцию на ось x_1. В частности, если Ω — область, то e_1 — интервал, а если Ω — замыкание области, то e_1 — отрезок $[a, b]$, где $a = \min\limits_{x \in \Omega} x_1$, $b = \max\limits_{x \in \Omega} x_1$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим еще через $\Omega_{x_1^0}$ сечение Ω плоскостью $x_1 = x_1^0$, т. е. множество точек вида $\left(x_1^0, x_2, \ldots, x_n\right) \in \Omega$.

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_\Omega \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{e_1} dx_1 \int\limits_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n, \quad (6)$$

всегда верное, если f ограничена на Ω, e_1 — измеримое одномерное множество и интегралы $\int\limits_\Omega \ldots \int$ и $\int\limits_{\Omega_{x_1}}$ (для любого $x_1 \in e_1$) имеют смысл.

Доказательство. Поместим Ω в некоторый n-мерный прямоугольник $\Delta = [a_1, b_1] \times \Delta'$, где $\Delta' = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 2, \ldots, n\}$. Это возможно, потому что Ω измеримо, следовательно, ограничено.

Продолжим функцию f с Ω на Δ, положив

$$\bar f = \begin{cases} f & \text{на } \Omega, \\ 0 & \text{на } \Delta - \Omega. \end{cases}$$

Теперь имеем (пояснения ниже)

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{\Delta} \bar{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{\Delta'} \bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int\limits_{e_1} dx_1 \int\limits_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n.$$

Первое равенство в этой цепи верно в силу того, что Ω и Δ измеримы, $\bar{f} = 0$ на $\Delta - \Omega$, и $\bar{f}$ интегрируема на Δ.

Второе — по теореме 2. Ведь, кроме того, что функция $\bar{f}$ интегрируема на Ω, она при фиксированных допустимых x_1 как функция от $(x_2, \ldots, x_n)$ интегрируема по Ω_{x_1}, следовательно, и на Δ', потому что она равна нулю вне Ω_{x_1}.

Третье равенство верно, потому что e_1 измеримо, $\bar{f} = 0$ для $x_1 \bar{\in} e_1$ и для $x_1 \in e_1$, когда $(x_2, \ldots, x_n) \bar{\in} \Omega_{x_1}$.

Пример 1. Площадь S эллипса W: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ $(a, b > 0)$ (рис. 12.5) вычисляется следующим образом (пояснения ниже):

$$S = \iint\limits_{W} 1dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} dy = \int\limits_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx =$$
$$= 4\,\frac{b}{a}\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2ab\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right)\Bigg|_0^a = \pi ab.$$

Первое равенство в этой цепи следует из того, что W — измеримое в двумерном смысле множество, ведь его граница — гладкая кривая.

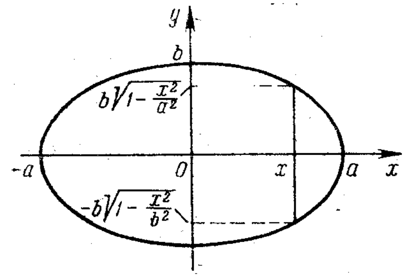

Рис. 12.5.

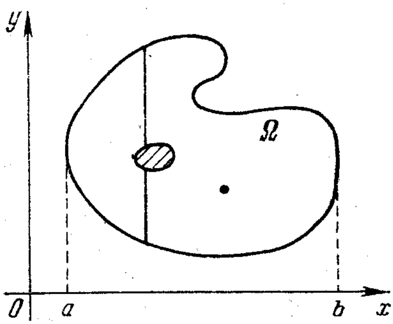

Рис. 12.6.

Второе — из доказанной выше леммы. Ведь $[-a, a]$ есть измеримая проекция W на ось x, и сечение W_x эллипса прямой параллельной оси y, проходящей через точку $x \in [a, b]$, есть отрезок $[-b\sqrt{1-(x^2/a^2)},$

$b\sqrt{1-(x^2/a^2)}]$, т. е. измеримое в одномерном смысле множество, на котором функция, равная 1, интегрируема.

Пример 2. На рис. 12.6 изображено замкнутое множество Ω с границей Γ, состоящей из двух кусочно гладких замкнутых контуров и точки. Ω, таким образом, измеримое в двумерном смысле. Его проекция на ось x есть отрезок $[a, b]$. Любое его сечение Ω_x прямой, параллельной оси y, проходящей через точку $x \in [a, b]$, есть отрезок или система двух отрезков, или точка,— все измеримые в одномерном смысле замкнутые множества. Поэтому если $f(x, y)$ непрерывна на Ω, то она интегрируема на Ω и на любом указанном сечении Ω_x, и к f применима доказанная лемма

$$\iint_{\Omega} f\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\Omega_x} f\,dy.$$

Теперь мы можем попытаться применить нашу лемму к внутреннему интегралу правой части (6).

Пусть $e_2(x)$ есть проекция сечения Ω_{x_1} на ось x_2, а $\Omega_{x_1x_2^0}$ — сечение ($(n-1)$-мерного множества) Ω_{x_1} плоскостью $x_2 = x_2^0$. Тогда

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{e_1} dx_1 \int_{e_2(x_1)} dx_2 \int_{\Omega_{x_1x_2}} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\,dx_3 \ldots dx_n,$$

если все множества $\Omega_{x_1x_2}$ $(x_2 \in e_2(x_1))$ измеримы в $(n-2)$-мерном смысле, а функция $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ от $(x_3, \ldots, x_n)$ интегрируема на $\Omega_{x_1x_2}$.

Продолжив этот процесс до конца, получим

$$\int_{\Omega} f\,d\mathbf{x} = \int_{e_1} dx_1 \int_{e_2(x_1)} dx_2 \int_{e_3(x_1,x_2)} dx_3 \ldots \int_{e_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n. \tag{7}$$

Все множества $e_1, e_2(x_1), \ldots, e_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$ одномерны и предполагаются измеримыми, кроме того, предполагается, что интеграл в левой части (7), а также все внутренние интегралы в правой, существуют.

Пример 3. Объем $|\Omega|$ эллипсоида Ω: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ $(a, b, c > 0)$ может быть вычислен следующим образом (пояснения ниже):

$$\Omega = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a} dx \int_{\Omega_x} dy\,dz = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} dy \int_{-c\sqrt{1-(x^2/a^2)-(y^2/b^2)}}^{c\sqrt{1-(x^2/a^2)-(y^2/b^2)}} dz =$$

$$= \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} 2c\sqrt{1-(x^2/a^2)-(y^2/b^2)}\,dy =$$

$$= bc\int_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}+\frac{y}{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right]_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}dx = bc\int_{-a}^{a}\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Множество Ω измеримо, ведь граница Γ состоит из двух непрерывных кусков поверхности

$$z = \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right),$$

каждый из которых проектируется взаимно однозначно на замкнутое ограниченное множество плоскости x, y.

Измеримыми и замкнутыми являются также сечения Ω плоскостями и прямыми, параллельными осями координат соответственно в двумерном и одномерном смысле, ведь они, если они не пусты, представляют собой при сечении плоскостями эллипсы или точки, а при сечении прямыми — отрезки или точки.

Таким образом, функция 1 интегрируема на Ω и на всех указанных сечениях Ω, и равенство (7) применимо.

Если функция $f(x, y)$ ограничена и непрерывна на $\Delta = [a, b]\times\times[c, d]$ за исключением конечного числа точек, то для нее на основании теоремы 1 имеет место

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy,$$

потому что для любого $x\in[a, b]$ функция $f(x, y)$ по y ограничена и имеет на $[c, d]$ разве что конечное число точек разрыва, следовательно, интегрируема на $[c, d]$.

В частности, если $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ и функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ ограничены и имеют конечное число точек разрыва соответственно на отрезках $[a, b]$, $[c, d]$, то

$$\iint_{\Delta}\varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_c^d \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^b\varphi(x)\,dx\int_c^d\psi(y)\,dy.$$

Распространение этих фактов на многомерный случай не представляет труда.

§ 12.13. Непрерывность интеграла по параметру

Рассмотрим интеграл

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_m) = \int\ldots\int_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)dy_1\ldots dy_n = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad (1)$$