$$= bc\int_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}+\frac{y}{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right]_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} dx = bc\int_{-a}^{a}\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Множество Ω измеримо, ведь граница Γ состоит из двух непрерывных кусков поверхности

$$z = \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\quad\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right),$$

каждый из которых проектируется взаимно однозначно на замкнутое ограниченное множество плоскости x, y.

Измеримыми и замкнутыми являются также сечения Ω плоскостями и прямыми, параллельными осями координат соответственно в двумерном и одномерном смысле, ведь они, если они не пусты, представляют собой при сечении плоскостями эллипсы или точки, а при сечении прямыми — отрезки или точки.

Таким образом, функция 1 интегрируема на Ω и на всех указанных сечениях Ω, и равенство (7) применимо.

Если функция $f(x, y)$ ограничена и непрерывна на $\Delta = [a, b]\times\times[c, d]$ за исключением конечного числа точек, то для нее на основании теоремы 1 имеет место

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy,$$

потому что для любого $x\in[a, b]$ функция $f(x, y)$ по y ограничена и имеет на $[c, d]$ разве что конечное число точек разрыва, следовательно, интегрируема на $[c, d]$.

В частности, если $f(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$ и функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ ограничены и имеют конечное число точек разрыва соответственно на отрезках $[a, b]$, $[c, d]$, то

$$\iint_{\Delta}\varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy=\int_a^b\varphi(x)\,dx\int_c^d\psi(y)\,dy.$$

Распространение этих фактов на многомерный случай не представляет труда.

§ 12.13. Непрерывность интеграла по параметру

Рассмотрим интеграл

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_m) = \int\underset{\Omega}{\ldots}\int f(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)dy_1\ldots dy_n = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad (1)$$

где Ω — измеримое множество n-мерного пространства точек $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, а функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ интегрируема по $\mathbf{y}$ на Ω. Тогда интеграл (1) есть функция F от точки $\mathbf{x}$.

Следующая теорема дает критерий непрерывности $F(\mathbf{x})$.

Теорема 1. *Если функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ непрерывна на множестве*

$$G \times \Omega \qquad (\mathbf{x} \in G, \ \mathbf{y} \in \Omega) \tag{2}$$

$(n+m)$-мерного пространства точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$, где G и Ω — замкнутые ограниченные множества в соответствующих пространствах точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то интеграл (1) (т. е. $F(\mathbf{x})$) есть непрерывная функция от $\mathbf{x} \in G$.

Доказательство. Обозначим через $\omega(\delta, f)$ модуль непрерывности функции f на множестве (2). Так как последнее замкнуто и ограничено, а функция f непрерывна на нем, то $\omega(\delta, f) \to 0$ $(\delta \to 0)$. Поэтому для $x, x' \in G$

$$|F(\mathbf{x}') - F(\mathbf{x})| = \left| \int_\Omega [f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})]\, d\mathbf{y} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega |f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \leqslant \int_\Omega \omega(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, f)\, d\mathbf{y} =$$

$$= \omega(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, f)\, |\Omega| \to 0 \quad (\mathbf{x}' \to \mathbf{x}),$$

и теорема доказана.

Теперь рассмотрим интеграл, обобщающий (1) только в случае, когда y есть переменное число (не вектор):

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= \int_{\varphi(x_1, \ldots, x_m)}^{\psi(x_1, \ldots, x_m)} f(x_1, \ldots, x_m; y)\, dy = \int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, y)\, dy \quad (x \in G), \tag{3}$$

и докажем теорему.

Теорема 2. *Если функция $f(\mathbf{x}, y)$ непрерывна на множестве H точек $(\mathbf{x}, y) = (x_1, \ldots, x_m; y)$ $(m+1)$-мерного пространства, определяемых неравенствами $\varphi(\mathbf{x}) \leqslant y \leqslant \psi(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in G)$, где $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ — непрерывные функции на замкнутом ограниченном m-мерном множестве G точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, то функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна на G.*

Доказательство. Подстановка

$$y = \varphi(\mathbf{x}) + t[\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})] \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$
$$dy = [\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})]\, dt,$$

приводит интеграл (3) к виду

$$F(\mathbf{x}) = [\psi(\mathbf{x}) - \varphi(x)] \int_0^1 f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + t[\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})])\, dt. \tag{4}$$

Но $\psi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x})$ — непрерывная функция на G, а интеграл в (4) тоже есть непрерывная функция от $\mathbf{x}\in G$, что следует из теоремы 1. Ведь подынтегральная функция есть непрерывная функция от $(\mathbf{x}, t)\in G\times[0, 1]$. Следовательно, $F(\mathbf{x})$ непрерывна на G.

Пример. Пусть на единичном шаре ω задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Интеграл от нее по ω равен

$$\int_\omega f\,d\omega=\int_{-1}^{+1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}f(x, y, z)\,dz.$$

Внутренний интеграл $F(x, y)=\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}f(x, y, z)\,dz$ есть функция F от (x, y), определенная на круге σ: $x^2+y^2\leqslant 1$. Она непрерывна на σ. Действительно, f непрерывна на замкнутом шаре ω; поверхности, его ограничивающие, $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ и $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\leqslant 1)$, описываются непрерывными на круге σ функциями. Непрерывность F на σ вытекает из доказанной теоремы. Таким образом,

$$\int_\omega f\,d\omega=\int_{-1}^{1}dx\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}F(x, y)\,dy\right)$$

Интеграл $\Phi(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}F(x, y)\,dy$ в свою очередь есть непрерывная функция от $x\in[-1, +1]$ на основании этой же теоремы. Действительно, $F(x, y)$ непрерывна на круге σ (замкнутом ограниченном множестве точек x, y), а кривые $y=-\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, ограничивающие σ, непрерывны. По теореме $\Phi(x)$ непрерывна на $[-1, +1]$.

§ 12.14. Геометрическая интерпретация знака определителя

Зададим в плоскости прямоугольную систему координат (x_1, x_2), как на рис. 12.7 и 12.8.

Мы предполагаем для определенности, что положительное направление оси x_2 получается из положительного направления оси x_1 поворотом оси x_1 на угол 90° против часовой стрелки (рис. 12.9). Зададим два не равных нулю вектора $\mathbf{a}=(a_1, a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2)$, выходящих из нулевой точки, с определителем

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (1)$$

Если $\Delta>0$, то чтобы получить направление вектора $\mathbf{b}$, нужно повернуть (против часовой стрелки) $\mathbf{a}$ на угол, меньший чем π,