Но $\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ — непрерывная функция на G, а интеграл в (4) тоже есть непрерывная функция от $\mathbf{x} \in G$, что следует из теоремы 1. Ведь подынтегральная функция есть непрерывная функция от $(\mathbf{x}, t) \in G \times [0, 1]$. Следовательно, $F(\mathbf{x})$ непрерывна на G.

Пример. Пусть на единичном шаре ω задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Интеграл от нее по ω равен

$$\int_\omega f\,d\omega = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz.$$

Внутренний интеграл $F(x, y) = \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz$ есть функция F от (x, y), определенная на круге σ: $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Она непрерывна на σ. Действительно, f непрерывна на замкнутом шаре ω; поверхности, его ограничивающие, $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(x^2 + y^2 \leqslant 1)$, описываются непрерывными на круге σ функциями. Непрерывность F на σ вытекает из доказанной теоремы. Таким образом,

$$\int_\omega f\,d\omega = \int_{-1}^{1} dx \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x, y)\,dy \right)$$

Интеграл $\Phi(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x, y)\,dy$ в свою очередь есть непрерывная функция от $x \in [-1, +1]$ на основании этой же теоремы. Действительно, $F(x, y)$ непрерывна на круге σ (замкнутом ограниченном множестве точек x, y), а кривые $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, ограничивающие σ, непрерывны. По теореме $\Phi(x)$ непрерывна на $[-1, +1]$.

§ 12.14. Геометрическая интерпретация знака определителя

Зададим в плоскости прямоугольную систему координат (x_1, x_2), как на рис. 12.7 и 12.8.

Мы предполагаем для определенности, что положительное направление оси x_2 получается из положительного направления оси x_1 поворотом оси x_1 на угол 90° против часовой стрелки (рис. 12.9). Зададим два не равных нулю вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, выходящих из нулевой точки, с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Если $\Delta > 0$, то чтобы получить направление вектора $\mathbf{b}$, нужно повернуть (против часовой стрелки) $\mathbf{a}$ на угол, меньший чем π, а если $\Delta < 0$, то это связано с поворотом на угол, больший чем π. В самом деле, очевидно, что $a = |a|(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$ и $b = |b|(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$, где φ_1, φ_2 — углы, образованные соответственно векторами **a**, **b** с осью x, откуда $\Delta = |a| \cdot |b| \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$.

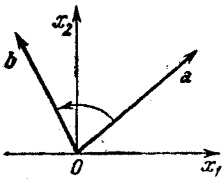

Рис. 12.7.

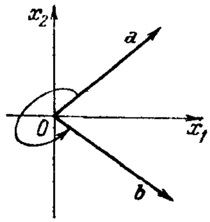

Рис. 12.8.

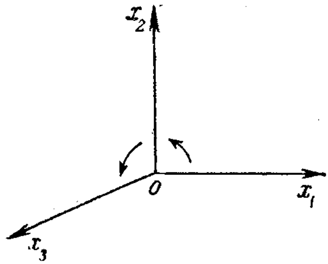

Рис. 12.9.

Рассмотрим теперь трехмерное пространство, где задана прямоугольная система координат (x_1, x_2, x_3) и три вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть $\mathbf{i}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{i}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{i}_3 = (0, 0, 1)$ — орты осей x_1, x_2, x_3. Их определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (>0).$$

Если $\Delta > 0$, то можно определить три непрерывные вектор-функции

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)),$$
$$\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)),$$
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

такие, что будут удовлетворяться условия

$$\alpha(0) = \mathbf{a}, \quad \beta(0) = \mathbf{b}, \quad \gamma(0) = \mathbf{c}, \quad \alpha(1) = \mathbf{i}_1, \quad \beta(1) = \mathbf{i}_2, \quad \gamma(1) = \mathbf{i}_3$$

и при этом для любого $t \in [0, 1]$ определитель

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t) \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \\ \gamma_1(t) & \gamma_2(t) & \gamma_3(t) \end{vmatrix} > 0. \qquad (2)$$

Если же $\Delta < 0$, то невозможно построить три непрерывных вектор-функции с указанными свойствами.

В случае $\Delta > 0$ говорят, что упорядоченная тройка векторов **a**, **b**, **c** ориентирована так же, как тройка $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, в то время как в случае $\Delta < 0$ тройка, **a**, **b**, **c** ориентирована противоположно ориентации тройки $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$.

Подобная характеристика (1-го и 2-го случаев) может быть дана и для пар векторов **a**, **b** на плоскости (см. еще далее § 13.8).

Чтобы обосновать сказанное, начнем с того, что на протяжении отрезка времени $[0, 1/4]$ непрерывно деформируем векторы **a**, **b**, **c**, не изменяя их направления, так, чтобы в результате получились три единичных вектора. Иначе говоря, вводим вектор-функции $\alpha(t) = \varphi(t)\mathbf{a}$, $\beta(t) = \psi(t)\mathbf{b}$, $\gamma(t) = \chi(t)\mathbf{c}$, где φ, ψ, χ — непрерывные положительные на $[0, 1/4]$ функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(0) = \psi(0) = \chi(0) = 1, \quad \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = |a|^{-1}, \quad \psi\left(\frac{1}{4}\right) = |b|^{-1}, \quad \chi\left(\frac{1}{4}\right) = |c|^{-1}.$$

Пусть L есть плоскость векторов **a** и **b**. Оставляя векторы $\alpha(1/4)$ и $\gamma(1/4)$ постоянными на протяжении отрезка времени $[1/4, 1/2]$, поворачиваем вектор $\beta(1/4)$ в плоскости L на кратчайший угол до положения, перпендикулярного вектору

$$\alpha(1/4) = \alpha(1/2).$$

Теперь при фиксированных векторах $\alpha(1/2)$, $\beta(1/2)$, поворачиваем в течение времени $t \in [1/2, 3/4]$ на кратчайший угол только вектор γ до положения, перпендикулярного плоскости L. В результате векторы $\alpha(3/4)$, $\beta(3/4)$, $\gamma(3/4)$ образуют репер взаимно перпендикулярных единичных векторов. Теперь на протяжении отрезка времени $[3/4, 1]$ вращаем этот репер как твердое тело так, чтобы векторы $\alpha(1)$, $\beta(1)$, соответственно, совпали с ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$. Тогда, очевидно,

$$\alpha(1) = \mathbf{i}_1, \ \beta(1) = \mathbf{i}_2, \ \gamma(1) = \pm\mathbf{i}_3.$$

При этом будет знак «+», если $\Delta > 0$, и знак «−», если $\Delta < 0$. Ведь наш процесс описывается непрерывными не компланарными векторами $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, для которых определитель $\Delta(t)$ (составленный по образцу (2)) не равен нулю при любом $t \in [0, 1]$. Но тогда знаки $\Delta(0) = \Delta$ и $\Delta(1)$ совпадают, что возможно лишь, если $\gamma(1) = \mathbf{i}_3$ при $\Delta > 0$ и $\gamma(1) = -\mathbf{i}_3$ при $\Delta < 0$.

§ 12.15. Замена переменных в кратном интеграле. Простейший случай

Покажем, как видоизменяется интеграл

$$\iint_{\Omega'} f(x_1', x_2')\, dx_1' dx_2', \tag{1}$$

если в нем произвести замену переменных

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2, \\ x_2' &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \quad \left(D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\right). \tag{2}$$

Будем считать, что Ω' — область с непрерывной кусочно гладкой границей Γ' (рис. 12.10).

Преобразование, обратное к (2), отображает Ω' на некоторую область Ω плоскости (x_1, x_2) с кусочно гладкой границей Γ