В случае $\Delta > 0$ говорят, что упорядоченная тройка векторов **a**, **b**, **c** ориентирована так же, как тройка $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, в то время как в случае $\Delta < 0$ тройка, **a**, **b**, **c** ориентирована противоположно ориентации тройки $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$.

Подобная характеристика (1-го и 2-го случаев) может быть дана и для пар векторов **a**, **b** на плоскости (см. еще далее § 13.8).

Чтобы обосновать сказанное, начнем с того, что на протяжении отрезка времени $[0, 1/4]$ непрерывно деформируем векторы **a**, **b**, **c**, не изменяя их направления, так, чтобы в результате получились три единичных вектора. Иначе говоря, вводим вектор-функции $\alpha(t) = \varphi(t)\mathbf{a}$, $\beta(t) = \psi(t)\mathbf{b}$, $\gamma(t) = \chi(t)\mathbf{c}$, где $\varphi$, $\psi$, $\chi$ — непрерывные положительные на $[0, 1/4]$ функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(0) = \psi(0) = \chi(0) = 1, \quad \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = |a|^{-1}, \quad \psi\left(\frac{1}{4}\right) = |b|^{-1}, \quad \chi\left(\frac{1}{4}\right) = |c|^{-1}.$$

Пусть $L$ есть плоскость векторов **a** и **b**. Оставляя векторы $\alpha(1/4)$ и $\gamma(1/4)$ постоянными на протяжении отрезка времени $[1/4, 1/2]$, поворачиваем вектор $\beta(1/4)$ в плоскости $L$ на кратчайший угол до положения, перпендикулярного вектору

$$\alpha(1/4) = \alpha(1/2).$$

Теперь при фиксированных векторах $\alpha(1/2)$, $\beta(1/2)$, поворачиваем в течение времени $t \in [1/2, 3/4]$ на кратчайший угол только вектор $\gamma$ до положения, перпендикулярного плоскости $L$. В результате векторы $\alpha(3/4)$, $\beta(3/4)$, $\gamma(3/4)$ образуют репер взаимно перпендикулярных единичных векторов. Теперь на протяжении отрезка времени $[3/4, 1]$ вращаем этот репер как твердое тело так, чтобы векторы $\alpha(1)$, $\beta(1)$, соответственно, совпали с ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$. Тогда, очевидно,

$$\alpha(1) = \mathbf{i}_1, \ \beta(1) = \mathbf{i}_2, \ \gamma(1) = \pm\mathbf{i}_3.$$

При этом будет знак «+», если $\Delta > 0$, и знак «−», если $\Delta < 0$. Ведь наш процесс описывается непрерывными не компланарными векторами $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, для которых определитель $\Delta(t)$ (составленный по образцу (2)) не равен нулю при любом $t \in [0, 1]$. Но тогда знаки $\Delta(0) = \Delta$ и $\Delta(1)$ совпадают, что возможно лишь, если $\gamma(1) = \mathbf{i}_3$ при $\Delta > 0$ и $\gamma(1) = -\mathbf{i}_3$ при $\Delta < 0$.

## § 12.15. Замена переменных в кратном интеграле. Простейший случай

Покажем, как видоизменяется интеграл

$$\iint_{\Omega'} f(x_1', x_2')\,dx_1'dx_2', \tag{1}$$

если в нем произвести замену переменных

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2, \\ x_2' &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \quad \left(D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\right). \tag{2}$$

Будем считать, что $\Omega'$ — область с непрерывной кусочно гладкой границей $\Gamma'$ (рис. 12.10).

Преобразование, обратное к (2), отображает $\Omega'$ на некоторую область $\Omega$ плоскости $(x_1, x_2)$ с кусочно гладкой границей $\Gamma$

(рис. 12.11), и на $\Omega$ определена функция

$$F(x_1,\ x_2) = f(ax_1 + bx_2,\ cx_1 + dx_2) \qquad ((x_1,\ x_2) \in \Omega).$$

Введем на плоскости $(x_1,\ x_2)$ прямоугольную сетку со сторонами квадратов $\Delta$ длины $h$. Она отображается при помощи уравнений (2), вообще говоря, в косоугольную сетку, делящую

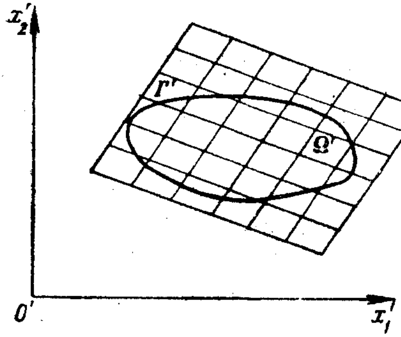


Рис. 12.10.

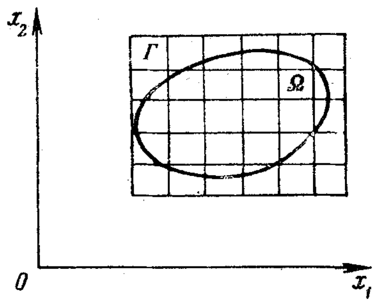


Рис. 12.11.

плоскость $(x_1', x_2')$ на равные параллелограммы $\Delta'$ (образы $\Delta$), имеющие площадь

$$|\Delta'| = |D|\,|\Delta| = |D|\,h^2, \quad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Тем самым определены разбиения $\rho$, $\rho'$ соответственно областей $\Omega$, $\Omega'$.

Имеем

$$S_{\rho'}(f) = \sum f(x_1', x_2')\,|\Delta'| =$$
$$= \sum F(x_1, x_2)\,|D|\,|\Delta| = S_\rho(|D|\,F) \quad ((x_1, x_2) \in \Delta). \tag{4}$$

Мы считаем, что вторая сумма в этой цепи распространена только на полные квадраты $\Delta \subset \Omega$, соответственно первая — на соответствующие им «полные» параллелограммы $\Delta'$ (см. теорему 4 § 12.7). Переходя к пределу в (4) при $h \to 0$, получим формулу

$$\iint_{\Omega'} f(x_1', x_2')\,dx_1'dx_2' = \iint_{\Omega} F(x_1, x_2)\,|D|\,dx_1dx_2 =$$
$$= |D| \iint_{\Omega} F(x_1, x_2)\,dx_1dx_2. \tag{5}$$

В этом рассуждении можно считать, что функция $f$ непрерывна на $\overline{\Omega'}$, и тогда функция $F$ будет непрерывной на $\overline{\Omega}$, и оба интеграла (5) существуют, а выше доказан факт равенства (5). Достаточно, впрочем, считать, что функция $f$ интегрируема на

$\Omega'$, и тогда первая сумма в (4) имеет предел, когда $d(\Delta') \to 0$, что автоматически влечет существование равного ему предела второй суммы, когда $d(\Delta) \to 0$, т. е. существование второго интеграла (5), равного первому.

В следующем параграфе дана более общая формула.

## § 12.16. Замена переменных в кратном интеграле

Теорема 1. *Пусть в $n$-мерном пространстве $R$ точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ задана измеримая область $\Omega$ и рассматривается еще другое $n$-мерное пространство $R'$ точек $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, а в нем измеримая область $\Omega'$.*

*Предположим, что точки $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ переходят в точки $\mathbf{x}' \in \overline{\Omega}'$ при помощи отображения (операции)*

$$x'_j = \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n) \quad (j = 1, \ldots, n;\ \mathbf{x} \in \overline{\Omega}), \tag{1}$$

*которое мы будем еще обозначать так:*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \tag{1'}$$

*Мы будем предполагать, что операция $A$ обладает следующими свойствами:*

1) *Она взаимно однозначно отображает $\Omega$ на $\Omega'$* *):

$$\Omega \rightleftarrows \Omega' \tag{2}$$

*(взаимно однозначное соответствие при отображении $A$ между точками границ $\Omega$ и $\Omega'$ не требуется).*

2) *Функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ непрерывны и имеют на $\overline{\Omega}$ непрерывные частные производные с якобианом* **)

$$D(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

*Пусть, далее, задана интегрируемая на $\Omega'$ функция*

$$f(\mathbf{x}') = f(x'_1, \ldots, x'_n),$$

*преобразующаяся при помощи подстановок (1) в функцию*

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}) = f[\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{x})] \quad (\mathbf{x} \in \Omega). \tag{4}$$

---

*) Можно заранее не предполагать, что $\Omega'$ есть область. Это следует из непрерывности $A\mathbf{x}$ на $\Omega$ и (2) (см. далее § 12.20, теорема 3).

**) На знак $D(x)$ никаких условий не накладывается. Однако на самом деле условия теоремы автоматически влекут либо неравенство $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ всюду на $\Omega$, либо неравенство $D(\mathbf{x}) \leqslant 0$ всюду на $\Omega$ (см. § 12.21).