$\Omega'$, и тогда первая сумма в (4) имеет предел, когда $d(\Delta') \to 0$, что автоматически влечет существование равного ему предела второй суммы, когда $d(\Delta) \to 0$, т. е. существование второго интеграла (5), равного первому.

В следующем параграфе дана более общая формула.

## § 12.16. Замена переменных в кратном интеграле

Теорема 1. *Пусть в $n$-мерном пространстве $R$ точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ задана измеримая область $\Omega$ и рассматривается еще другое $n$-мерное пространство $R'$ точек $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, а в нем измеримая область $\Omega'$.*

*Предположим, что точки $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ переходят в точки $\mathbf{x}' \in \overline{\Omega}'$ при помощи отображения (операции)*

$$x'_j = \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n) \quad (j = 1, \ldots, n; \mathbf{x} \in \overline{\Omega}), \tag{1}$$

*которое мы будем еще обозначать так:*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \tag{1'}$$

*Мы будем предполагать, что операция $A$ обладает следующими свойствами:*

1) *Она взаимно однозначно отображает $\Omega$ на $\Omega'$* *):

$$\Omega \rightleftarrows \Omega' \tag{2}$$

*(взаимно однозначное соответствие при отображении $A$ между точками границ $\Omega$ и $\Omega'$ не требуется).*

2) *Функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ непрерывны и имеют на $\overline{\Omega}$ непрерывные частные производные с якобианом* **)

$$D(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

*Пусть, далее, задана интегрируемая на $\Omega'$ функция*

$$f(\mathbf{x}') = f(x'_1, \ldots, x'_n),$$

*преобразующаяся при помощи подстановок (1) в функцию*

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}) = f[\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{x})] \quad (\mathbf{x} \in \Omega). \tag{4}$$

---

*) Можно заранее не предполагать, что $\Omega'$ есть область. Это следует из непрерывности $A\mathbf{x}$ на $\Omega$ и (2) (см. далее § 12.20, теорема 3).

**) На знак $D(x)$ никаких условий не накладывается. Однако на самом деле условия теоремы автоматически влекут либо неравенство $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ всюду на $\Omega$, либо неравенство $D(\mathbf{x}) \leqslant 0$ всюду на $\Omega$ (см. § 12.21).

*Тогда имеет место формула замены переменных в кратном интеграле*

$$\int\limits_{\Omega'} f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = \int\limits_{\Omega} F(\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{5}$$

*(утверждающая существование интеграла в правой части* (5) *и равенство* (5)).

*В частности, если функция* $f(\mathbf{x}')$ *непрерывна на* $\overline{\Omega}'$, *то непрерывна также функция* $F$ *на* $\overline{\Omega}$ *и оба интеграла в* (5) *существуют, а формула* (5) *утверждает их равенство.*

Трудность теоремы заключается в лемме, которая будет доказана в § 12.17. Мы ее сформулируем и сразу же покажем, как с ее помощью доказывается равенство (5).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы и* $\Delta \subset \Omega$ *есть произвольный куб с ребром* $h$, *а* $\Delta' = A(\Delta)$ — *его образ на* $\Omega'$ *при помощи операции* $A$. *Тогда имеет место равенство*

$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x})|\,|\Delta| + O(h^n\omega(h)), \tag{6}$$

*где* $D(\mathbf{x})$ — *значение якобиана* $D$ *в одной из точек* $\mathbf{x} \in \Delta$, *а*

$$\omega(h) = \sup_{i,j=1,\ldots,n} \omega_{ij}(h),$$

$$\omega_{ij}(h) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<h\\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\overline{\Omega}}} \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\varphi_j}(\mathbf{y})\right| \tag{7}$$

*(модуль непрерывности* $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ *на* $\overline{\Omega}$) *и константа* $C$, *входящая в* $O$, *не зависит от* $\Delta$ *(т. е. от* $h$ *и положения* $\Delta$ *на* $\Omega$).

Важно заметить, что так как частные производные $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ по условию теоремы непрерывны на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Omega}$, то их модули непрерывности $\omega_{ij}(h) \to 0$ $(h \to 0)$, но тогда и

$$\omega(h) \to 0 \qquad (h \to 0). \tag{8}$$

Поэтому остаточный член в формуле (6) удовлетворяет неравенству

$$|O(h^n\omega(h))| \leqslant Ch^n\omega(h) = o(h^n) \qquad (h \to 0) \tag{9}$$

и притом равномерно относительно $\mathbf{x} \to \overline{\Omega}$, потому что правая часть (9) не зависит от $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. Что касается первого члена правой части (6), то он равен

$$|D(\mathbf{x})|\,|\Delta| = |D(\mathbf{x})|\,h^n, \text{ т. е. } |\Delta'| = |D(\mathbf{x})|\,h^n + o(h^n) \qquad (h \to 0).$$

Из этого равенства, в частности, следует, что для любого $\mathbf{x} \in \Omega$ имеет место равенство ($x \in \Delta \subset \Omega$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\Delta'|}{\Delta} = |D(\mathbf{x})| \quad (\mathbf{x} \in \Omega), \tag{10}$$

показывающее, что *величина* $|D(\mathbf{x})|$ *с точностью до бесконечно малых* $o$ (1), $h \to 0$, *есть коэффициент увеличения элементарного объема, сконцентрированного возле точки* $\mathbf{x}$ *при преобразовании его посредством операции* $A$.

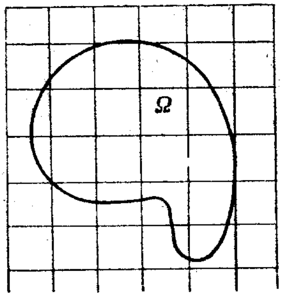


Рис. 12.12.

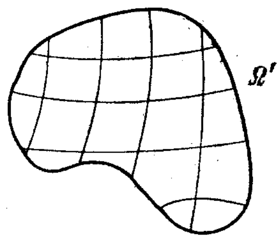


Рис. 12.13.

Разобьем $\Omega$ $h$-сеткой, состоящей из кубов с ребрами длины $h$ (рис. 12.12). Часть сетки, содержащаяся в $\Omega$, при помощи операции $A$ переходит в криволинейную сетку поверхностей, разбивающую $\Omega'$ на измеримые части (рис. 12.13) (см. теорему 3, § 12.5).

Обозначим через $\Delta$ полные кубы сетки, входящие вместе со своими границами в $\Omega$. При помощи операции $A$ открытое ядро $\Delta$ переходит в открытое ядро $\Delta'$, а граница $\Delta$ — в границу $\Delta'$ (формально это утверждение требует доказательства, см. § 12.20, теорему 3 и замечание к ней). При этом, если $h \to 0$, то максимальный диаметр частичных множеств соответствующего разбиения $\Omega'$ стремится к нулю, потому что в преобразовании (1) функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ равномерно непрерывны на $\overline{\Omega}$.

На основании леммы 1

$$\sum f(\mathbf{x}')\,|\Delta'| = \sum F(\mathbf{x})\left(|D(\mathbf{x})|\,|\Delta| + O\left(\omega(h)\,h^n\right)\right), \tag{11}$$

где $\Delta' = A(\Delta)$, сумма распространена на все $\Delta$, а $f(\mathbf{x}')$ и $F(\mathbf{x})$, $D(\mathbf{x})$ обозначают значения $f$, $F$, $D$ соответственно в одной из точек $\Delta'$ или $\Delta$. Из (11) после перехода к пределу при $h \to 0$ получим равенство (5). В самом деле, входящая в $O$ константа $C$ — одна и та же для всех слагаемых правой части (11), поэтому, учитывая ограниченность $F$ на $\Omega$ ($|F| < K$)

$$\sum F(\mathbf{x})\,O\left(\omega(h)\left(h^n\right)\right| \leqslant KC\omega(h) \sum |\Delta| \leqslant KC\omega(h)\,|\Omega| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Далее, в силу интегрируемости $f$ на $\Omega'$

$$\lim_{h\to 0}\sum f(\mathbf{x}')\,|\Delta'| = \lim_{\max|\Delta'|\to 0}\sum f(\mathbf{x}')\,|\Delta'| = \int_{\Omega'} f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'.$$

Но тогда существует равный этому интегралу предел

$$\lim_{h\to 0}\sum F(\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,|\Delta| = \int_{\Omega} F(\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}.$$

Таким образом, существует интеграл от $F(\mathbf{x})|D(\mathbf{x})|$ на $\Omega$. Итак, формула (5) доказана.

## § 12.17. Доказательство леммы 1 § 12.16

Все рассуждения проведем в двумерном случае

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2). \tag{1}$$

В $n$-мерном случае, как будет видно, они совершенно аналогичны.

Итак, пусть $\Delta = \{x_i^0 < x_i < x_i^0 + h;\ i = 1, 2\}$*) — квадрат $PA_1CA_2$ (рис. 12.14) и $\Delta'$ — его образ — криволинейный параллелограмм $P'A_1'C'A_2'$ (рис. 12.15). $\Delta'$ есть область, граница ее $\gamma'$ есть образ

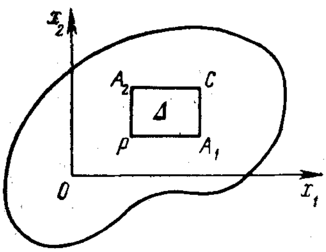


Рис. 12.14.

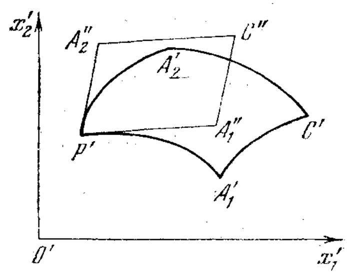


Рис. 12.15.

при помощи $A$ границы $\gamma$ квадрата $\Delta$ (см. § 12.20, теорема 3). Например, сторона $\Delta$, имеющая уравнение $x_2 = x_2^0$, имеет в качестве своего образа кривую

$$x_1' = \varphi_1(x_1, x_2^0), \quad x_2' = \varphi_2(x_1, x_2^0) \quad (x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 + h),$$

определяемую непрерывно дифференцируемыми функциями параметра $x_1$ **). Мы не называем эту кривую гладкой, потому что не исключаем, что для какого-либо значения $x_1$ частные произ-

---

*) В $n$-мерном случае $\Delta = \{x_i^0 < x_i < x_i^0 + h;\ i = 1, \ldots, n\}$.

**) В $n$-мерном случае кусок границы $\Delta'$, соответствующей грани $x_j = x_j^0$, определяется уравнениями $x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$.