Далее, в силу интегрируемости f на Ω'

$$\lim_{h\to 0}\sum f(\mathbf{x}')\,|\Delta'| = \lim_{\max|\Delta'|\to 0}\sum f(\mathbf{x}')\,|\Delta'| = \int_{\Omega'} f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'.$$

Но тогда существует равный этому интегралу предел

$$\lim_{h\to 0}\sum F(\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,|\Delta| = \int_{\Omega} F(\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}.$$

Таким образом, существует интеграл от $F(\mathbf{x})|D(\mathbf{x})|$ на Ω. Итак, формула (5) доказана.

§ 12.17. Доказательство леммы 1 § 12.16

Все рассуждения проведем в двумерном случае

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2). \tag{1}$$

В n-мерном случае, как будет видно, они совершенно аналогичны.

Итак, пусть $\Delta = \{x_i^0 < x_i < x_i^0 + h;\ i = 1, 2\}$*) — квадрат PA_1CA_2 (рис. 12.14) и Δ' — его образ — криволинейный параллелограмм $P'A_1'C'A_2'$ (рис. 12.15). Δ' есть область, граница ее γ' есть образ

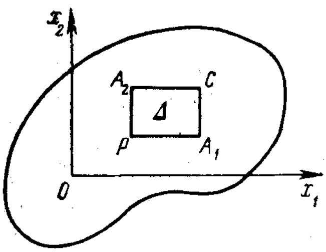

Рис. 12.14.

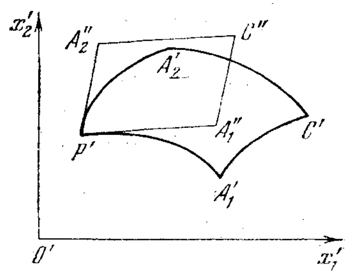

Рис. 12.15.

при помощи A границы γ квадрата Δ (см. § 12.20, теорема 3). Например, сторона Δ, имеющая уравнение $x_2 = x_2^0$, имеет в качестве своего образа кривую

$$x_1' = \varphi_1(x_1, x_2^0), \quad x_2' = \varphi_2(x_1, x_2^0) \quad (x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 + h),$$

определяемую непрерывно дифференцируемыми функциями параметра x_1 **). Мы не называем эту кривую гладкой, потому что не исключаем, что для какого-либо значения x_1 частные произ-

---

*) В n-мерном случае $\Delta = \{x_i^0 < x_i < x_i^0 + h;\ i = 1, \ldots, n\}$.

**) В n-мерном случае кусок границы Δ', соответствующей грани $x_j = x_j^0$, определяется уравнениями $x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

водные $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x_1, x_2^0)$ и $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x_1, x_2^0)$ могут одновременно равняться нулю. Все же она имеет меру нуль (см. теорему 3 § 12.5).

Нам предстоит доказать равенство

$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x}^0)|\, |\Delta| + O(h^2\omega(h)), \tag{2}$$

где константа в O не зависит от $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Но тогда это равенство верно при замене в нем $\mathbf{x}^0$ на произвольную точку $\mathbf{x} \in \Delta$ *).

В силу непрерывной дифференцируемости φ_i имеем

$$x'_i = x_i^{0'} + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)_1 (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)_1 (x_2 - x_2^0) \quad (i = 1, 2;\ \mathbf{x} \in \Delta), \tag{1'}$$

где $(\ \ )_1$ обозначает результат подстановки в $(\ \ )$ некоторой определенной точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Delta$.

Наряду с отображением (1), которое записано еще в виде (1'), мы рассматриваем линейное преобразование $\mathbf{x}'' = A^*\mathbf{x}$,

$$x''_i = x_i^{0'} + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)_0 (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)_0 (x_2 - x_2^0) \quad (i = 1, 2), \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами $\left(\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_0\right.$ — результат подстановки в $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ точки $\left.\mathbf{x}^0\right)$, отображающее Δ на некоторый параллелограмм Δ'' с границей γ''. Стороны Δ'', прилегающие к точке $\mathbf{x}^{0'}$, суть (приложенные к $\mathbf{x}^{0'}$) векторы

$$P'A''_i = \left(h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\right)_0,\ h\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\right)_0\right) \quad (i = 1, 2).$$

Длина их

$$|P'A''_i| = ha_i, \quad a_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\right)_0^2}. \tag{4}$$

Оценим расстояние между точками $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, соответствующими одной и той же точке $\mathbf{x} \in \Delta$. Из равенства

$$x'_i - x''_i =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)_0\right](x_1 - x_1^0) + \left[\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)_1 - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)_0\right](x_2 - x_2^0) \quad (i = 1, 2)$$

*) В силу § 12.16, (7) имеем $||D(\mathbf{x})| - |D(\mathbf{x}^0)|| \leqslant |D(\mathbf{x}) - D(\mathbf{x}^0)| \leqslant C\omega(h\sqrt{2}) \leqslant 2C\omega(h)$.

следует (см. (10), § 7.10)*)

$$|x_i'' - x_i'| \leqslant \omega(\sqrt{2}h)h + \omega(\sqrt{2}h)h \leqslant 4\omega(h)h, \tag{5}$$

$$|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'| = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2} \leqslant 6\omega(h)h = \lambda. \tag{6}$$

Таким образом, точка $\mathbf{x}'$ находится внутри круга с центром в $\mathbf{x}''$ радиуса λ.

Опишем из каждой точки $\mathbf{x}'' \in \gamma''$ (границы Δ'') кружок $v_{x''}$ радиуса λ. Объединение всех $v_{x''}$, соответствующих всем $x \in \gamma$, обозначим через e. Если параллелограмм Δ'' не слишком скошен, то получим картину, как на рис. 12.16.

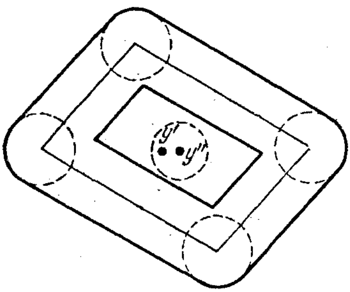

Рис. 12.16.

Множество e имеет вид рамки с закругленными внешними углами, внутри нее имеется параллелограмм $\Delta'' - e$. Круг $v_{y''}$, где $\mathbf{y}''$ — центр параллелограмма Δ'', полностью содержится в $\Delta'' - e$. Так как центр y квадрата Δ при помощи A^* переходит в $\mathbf{y}''$, то $\mathbf{y}' \subset v_{y''} \subset \Delta'' - e$.

Обозначим через H_i высоту Δ'', перпендикулярную i-й стороне (длины $a_i h$: $i = 1, 2$). Изображенная на рис. 12.16 картина во всяком случае будет иметь место, если

$$H_i > 4\lambda \qquad (i = 1, 2). \tag{7}$$

Площадь рамки e не превышает, очевидно, сумму площадей четырех кружков радиуса λ, описанных из угловых точек γ'' как из центров, плюс сумму площадей прямоугольников высоты 2λ с основаниями, равными длинам сторон параллелограммов Δ''.

Следовательно **),

$$|e| \leqslant 4\pi\lambda^2 + 2\sum_{i=1}^{2} 2\lambda a_i h \leqslant Kh^2\omega(h). \tag{8}$$

$\left(\varphi_i, \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right.$ ограничены на $\overline{\Omega}$, поэтому и a_i, и $\left.\omega(h)!\right)$, где K — константа, не зависящая от h и положения Δ на Ω.

Так как γ' содержится в рамке e и Δ' является ограниченным множеством (функции φ_i непрерывны, следовательно, ограничены на $\overline{\Omega}$), то интуитивно ясно, что

$$\Delta'' - \mathbf{e} \subset \Delta' \subset \Delta'' + \mathbf{e}. \tag{9}$$

---

*) В n-мерном случае в правых частях (5), (6) вместо чисел 4, 6 можно взять соответственно $n(\sqrt{n}+1)$, $\sqrt{n^3(\sqrt{n}+1)^2}$.

**) В n-мерном случае в правой части будет $K\omega(h)h^n$.

Ниже мы докажем это утверждение аккуратно, а сейчас воспользуемся им, чтобы оценить $|\Delta'|$.

Из (9) вытекает, что $|\Delta'| = |\Delta''| + \theta|e|(-1 \leqslant \theta \leqslant 1)$.

Следовательно, в силу (8) и учитывая, что площадь параллелограмма Δ'' равна абсолютной величине определителя, составленного по векторам, определяющим его стороны, получим

$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x}^0)|h^2 + O(h^2\omega(h)),$$

где константа в O не зависит от $\mathbf{x}^0$ и h.

Докажем (9). Вложение $\Delta'' - e \subset \Delta'$ следует из того, что $\Delta'' - e$ заведомо содержит одну точку $\mathbf{y}' \in \Delta'$ и ни одной граничной точки Δ', ведь все граничные точки Δ' содержатся в e. Если бы в $\Delta'' - e$ нашлась точка $\mathbf{z}$, не принадлежащая Δ', то отрезок $\overline{\mathbf{y}'\mathbf{z}}$ (соединяющий точку $\mathbf{y}' \in \Delta'$ с точкой $z \overline{\in} \Delta'$) содержал бы в себе граничную точку Δ'.

Вложение же $\Delta' \subset \Delta'' + e$ вытекает из следующих соображений. Допустим, что существует точка $\mathbf{z}' \in \Delta' - (\Delta'' + e)$. Выпустим из центра Δ'' луч, проходящий через $\mathbf{z}'$, и будем двигаться из $\mathbf{z}'$ по этому лучу в бесконечность. Так как Δ' — ограниченное множество (функции φ_1 и φ_2 ограничены на $\overline{\Delta}$), то мы обязательно должны наткнуться на точку γ' (границы Δ'). Но этого не может быть, потому что $\gamma' \subset e$.

Но еще надо рассмотреть случай, когда для некоторого $i = 1, 2$ имеет место неравенство

$$H_i \leqslant 4\lambda \tag{10}$$

(в частности, если $D(\mathbf{x}^0) = 0$ и параллелограмм Δ'' вырождается).

Тогда в силу (10), (6), (8) имеем

$$\begin{aligned}\big|\,|\Delta'| - |D(x^0)|h^2\big| &= \big|\,|\Delta'| - |\Delta''|\,\big| \leqslant |\Delta'| + |\Delta''| \leqslant \\ &\leqslant (|\Delta''| + |e|) + |\Delta''| = 2|\Delta''| + |e| \leqslant 2a_i hH_1 + |e| \leqslant \\ &\leqslant O(h^2\omega(h)) + O(h^2\omega(h)) = O(h^2\omega(h)).\end{aligned}$$

Поэтому $|\Delta'| - |D(x^0)|h^2 = O(h^2\omega(h))$, и верно (2).

Итак, во всех возможных случаях имеет место равенство (2). При этом константа C, входящая в остаток правой его части, не зависит от h и $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Из примечаний, которые делались попутно, видно, что доказательство в общем случае n совершенно аналогично.

§ 12.18. Полярные координаты в плоскости

Система уравнений

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta \tag{1}$$

осуществляет преобразование полярных координат в декартовы. Правые части (1) — непрерывно дифференцируемые функции с якобианом

$$D = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \geqslant 0. \tag{2}$$