Ниже мы докажем это утверждение аккуратно, а сейчас воспользуемся им, чтобы оценить $|\Delta'|$.

Из (9) вытекает, что $|\Delta'| = |\Delta''| + \theta|e|\,(-1 \leqslant \theta \leqslant 1)$.

Следовательно, в силу (8) и учитывая, что площадь параллелограмма Δ'' равна абсолютной величине определителя, составленного по векторам, определяющим его стороны, получим

$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x}^0)|\,h^2 + O(h^2\omega(h)),$$

где константа в O не зависит от $\mathbf{x}^0$ и h.

Докажем (9). Вложение $\Delta'' - e \subset \Delta'$ следует из того, что $\Delta'' - e$ заведомо содержит одну точку $\mathbf{y}' \in \Delta'$ и ни одной граничной точки Δ', ведь все граничные точки Δ' содержатся в e. Если бы в $\Delta'' - e$ нашлась точка $\mathbf{z}$, не принадлежащая Δ', то отрезок $\overline{\mathbf{y}'\mathbf{z}}$ (соединяющий точку $\mathbf{y}' \in \Delta'$ с точкой $z \overline{\in} \Delta'$) содержал бы в себе граничную точку Δ'.

Вложение же $\Delta' \subset \Delta'' + e$ вытекает из следующих соображений. Допустим, что существует точка $\mathbf{z}' \in \Delta' - (\Delta'' + e)$. Выпустим из центра Δ'' луч, проходящий через $\mathbf{z}'$, и будем двигаться из $\mathbf{z}'$ по этому лучу в бесконечность. Так как Δ' — ограниченное множество (функции φ_1 и φ_2 ограничены на $\overline{\Delta}$), то мы обязательно должны наткнуться на точку γ' (границы Δ'). Но этого не может быть, потому что $\gamma' \subset e$.

Но еще надо рассмотреть случай, когда для некоторого $i = 1, 2$ имеет место неравенство

$$H_i \leqslant 4\lambda \tag{10}$$

(в частности, если $D(\mathbf{x}^0) = 0$ и параллелограмм Δ'' вырождается).

Тогда в силу (10), (6), (8) имеем

$$\begin{aligned}\bigl|\,|\Delta'| - |D(x^0)|h^2\bigr| &= \bigl|\,|\Delta'| - |\Delta''|\,\bigr| \leqslant |\Delta'| + |\Delta''| \leqslant \\ &\leqslant (|\Delta''| + |e|) + |\Delta''| = 2|\Delta''| + |e| \leqslant 2a_i h H_1 + |e| \leqslant \\ &\leqslant O(h^2\omega(h)) + O(h^2\omega(h)) = O(h^2\omega(h)).\end{aligned}$$

Поэтому $|\Delta'| - |D(x^0)|h^2 = O(h^2\omega(h))$, и верно (2).

Итак, во всех возможных случаях имеет место равенство (2). При этом константа C, входящая в остаток правой его части, не зависит от h и $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Из примечаний, которые делались попутно, видно, что доказательство в общем случае n совершенно аналогично.

§ 12.18. Полярные координаты в плоскости

Система уравнений

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta \tag{1}$$

осуществляет преобразование полярных координат в декартовы. Правые части (1) — непрерывно дифференцируемые функции с якобианом

$$D = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \geqslant 0. \tag{2}$$

Введем чисто формально новую плоскость с декартовой системой (ρ, θ) и принадлежащую ей область

$$\Lambda = \{\rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}. \qquad (3)$$

Очевидно, преобразование (1) взаимно однозначно отображает Λ на Λ' — плоскость xy без луча $\theta = 0$. К тому же на Λ якобиан $D > 0$.

Пусть в плоскости x, y задана произвольная измеримая (в двумерном смысле) область, а на ее замыкании — непрерывная функция $f(x, y)$. Выкинем из этой области точки луча $\theta = 0$, если они есть, и оставшееся множество обозначим через Ω'. Будем считать, что Ω' есть область или сумма конечного числа непересекающихся попарно областей. Множеству Ω' соответствует в силу (1) некоторое множество $\Omega \subset \Lambda$ (которое предполагается измеримым), $\Omega \rightleftarrows \Omega'$. Справедливо равенство

$$\iint_{\Omega'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta, \qquad (4)$$

потому что мы находимся в условиях теоремы о замене переменных в кратном интеграле (f непрерывна на Ω', преобразование (1) непрерывно дифференцируемо на $\overline{\Omega}$ с якобианом $\rho > 0$ и $\Omega \rightleftarrows \Omega'$).

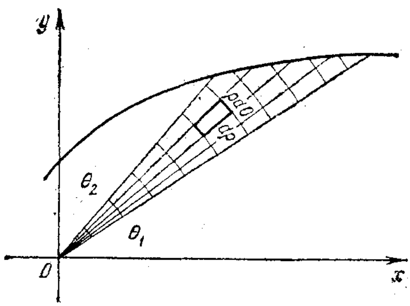

Рис. 12.17.

В полученной формуле (4) можно теперь заменить Ω, Ω' соответственно на их замыкания $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega'}$, потому что этим добавляются только множества двумерной меры нуль.

Если область Ω имеет вид сектора, ограниченного лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2 (\theta_1 < \theta_2 \leqslant \theta_1 + 2\pi)$ и непрерывной кривой $\rho = \psi(\theta)$, то

$$\iint_{\Omega'} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho. \qquad (5)$$

Впрочем, формулу (4) можно получить из естественных геометрических соображений, не прибегая к искусственной декартовой плоскости (ρ, θ). Плоскость x, y разбиваем на элементарные фигуры близкими концентрическими окружностями и выходящими из нулевой точки лучами (рис. 12.17). Площадь каждой такой элементарной фигуры (возле точки (ρ, θ)) или, как говорят, элемент площади в полярных координатах, равна с точностью до бесконечно малых высшего порядка $\Delta S \sim \rho\, d\rho\, d\theta$. Поэтому, если наш интеграл просуммировать по этим элементам, то получим

$$\lim_{\Delta\rho, \Delta\theta \to 0} \sum f_j \rho_j \Delta\rho \, \Delta\theta = \iint_{\Omega} f(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Пример:

$$\iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} e^{(x^2+y^2)} dx \, dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \pi \left(e^{R^2} - 1\right).$$

Замечание. Операция (1) непрерывна на замыкании $\overline{\Lambda}$ области $\Lambda = \{0 < \rho < 1;\ 0 < \theta < 2\pi\}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие $\Lambda \rightleftarrows \Lambda'$, но при этом взаимно однозначного соответствия между границами Λ и Λ' нет (см. теорему 1, § 12.16).

§ 12.19. Полярные и цилиндрические координаты в пространстве

Система уравнений

$$x = \rho \cos\theta \cos\varphi;\quad y = \rho \cos\theta \sin\varphi,\quad z = \rho \sin\theta \tag{1}$$

осуществляет переход от полярных координат в пространстве к декартовым (рис. 12.18). Здесь ρ — расстояние точки $P(x, y, z)$ до начала координат (полюса полярной системы), θ — угол между радиус-вектором ρ точки P и его проекцией на плоскость (x, y), φ — угол между указанной проекцией и положительным направлением оси x. Его отсчитывают в том направлении, в котором надо вращать вокруг оси z положительно направленную ось x, чтобы прийти к положительно направленной оси y кратчайшим путем.

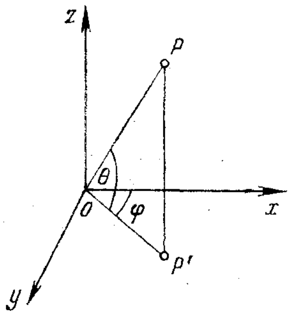

Рис. 12.18.

Функции справа в (1) непрерывно дифференцируемы с якобианом

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \cos\theta. \tag{2}$$

Введем формально новое трехмерное пространство с декартовой системой координат (ρ, θ, φ) и в нем открытое множество

$$\Lambda = \left\{0 < \rho, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\right\}. \tag{3}$$

Преобразования (1) взаимно однозначно отображают Λ на Λ', т. е. на пространство xyz с выкинутой полуплоскостью $\varphi = 0$ (множеством точек $(x, 0, z)$, где $x \geqslant 0$):

$$\Lambda \rightleftarrows \Lambda'. \tag{4}$$