наш интеграл просуммировать по этим элементам, то получим

$$\lim_{\Delta\rho,\,\Delta\theta\to 0} \sum f_j\rho_j\Delta\rho\,\Delta\theta = \iint_{\Omega} f(\rho,\,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Пример:

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \pi\left(e^{R^2}-1\right).$$

Замечание. Операция (1) непрерывна на замыкании $\overline{\Lambda}$ области $\Lambda = \{0<\rho<1;\ 0<\theta<2\pi\}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие $\Lambda \rightleftarrows \Lambda'$, но при этом взаимно однозначного соответствия между границами Λ и Λ' нет (см. теорему 1, § 12.16).

§ 12.19. Полярные и цилиндрические координаты в пространстве

Система уравнений

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi;\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi,\ z = \rho\sin\theta \tag{1}$$

осуществляет переход от полярных координат в пространстве к декартовым (рис. 12.18). Здесь ρ — расстояние точки $P(x,\ y,\ z)$ до начала координат (полюса полярной системы), θ — угол между радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}$ точки P и его проекцией на плоскость $(x,\ y)$, φ — угол между указанной проекцией и положительным направлением оси x. Его отсчитывают в том направлении, в котором надо вращать вокруг оси z положительно направленную ось x, чтобы прийти к положительно направленной оси y кратчайшим путем.

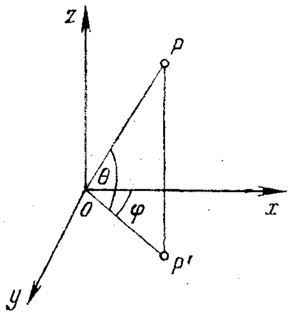

Рис. 12.18.

Функции справа в (1) непрерывно дифференцируемы с якобианом

$$D = \frac{D(x,\,y,\,z)}{D(\rho,\,\varphi,\,\theta)} = \rho^2\cos\theta. \tag{2}$$

Введем формально новое трехмерное пространство с декартовой системой координат $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ и в нем открытое множество

$$\Lambda = \left\{0<\rho,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ 0<\varphi<2\pi\right\}. \tag{3}$$

Преобразования (1) взаимно однозначно отображают Λ на Λ', т. е. на пространство xyz с выкинутой полуплоскостью $\varphi=0$ (множеством точек $(x,\ 0,\ z)$, где $x\geqslant 0$):

$$\Lambda \rightleftarrows \Lambda'. \tag{4}$$

Пусть теперь в пространстве xyz задана произвольная измеримая в трехмерном смысле область, а на ее замыкании — непрерывная функция $f(x, y, z)$. Выкинем из этой области точки полуплоскости $\varphi = 0$ и оставшееся множество обозначим через Ω'. Будем считать, что Ω' есть область или сумма конечного числа непересекающихся попарно областей. Множеству Ω' соответствует в силу (4) некоторое множество $\Omega \subset \Lambda$, которое мы будем предполагать измеримым.

Справедливо равенство

$$\iiint_{\Omega'} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega} F(\rho, \theta, \varphi)\, \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi, \qquad (5)$$

где

$$F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta), \qquad (6)$$

потому что мы находимся в условиях теоремы о замене переменных в кратном интеграле.

Теперь в (5) можно при желании заменить Ω, Ω' на $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}'$ потому, что эти множества отличаются соответственно на множества трехмерной меры нуль.

Пусть σ есть поверхность, описываемая в полярных координатах функцией $\rho = \psi(\theta, \varphi)$ $((\theta, \varphi) \in \omega)$, непрерывной на замыкании области ω, и пусть Ω — трехмерная измеримая область пространства (x, y, z), ограниченная поверхностью σ и конической поверхностью, лучи которой выходят из нулевой точки и опираются на σ. Тогда для непрерывной на $\overline{\Omega}$ функции $f(x, y, z)$ имеет место

$$\iiint_{\Omega} f\, dx\, dy\, dz = \iint_{\omega} d\theta\, d\varphi \int_0^{\psi(\theta,\varphi)} F\rho^2\cos\theta\, d\rho.$$

В частности, если ω соответствует всей единичной сфере, то последний интеграл равен

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\psi(\theta,\varphi)} F\rho^2\, d\rho.$$

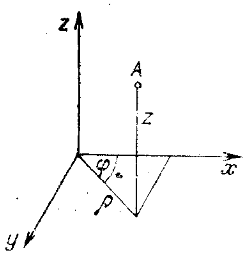

Рис. 12.19.

Чтобы наглядно получить элемент объема в полярных координатах, рассечем пространство на малые части концентрическими шаровыми поверхностями с центром в полярном полюсе (точке $\rho = 0$) плоскостями, проходящими через ось z, и круговыми коническими поверхностями, имеющими своей осью ось z. Полученные ячейки имеют объем, равный с точностью до бесконечно малых высшего порядка $\Delta v \sim \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$, где (ρ, θ, φ) — одна из точек ячейки.

Замечание. Операция (1) непрерывна на замыкании $\overline{\Lambda}$ области $\Lambda = \{0 < \rho < 1,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие $\Lambda \rightleftarrows \Lambda'$. Однако при этом нет взаимно однозначного соответствия точек границ Λ и Λ'.

Цилиндрические координаты $(\rho,\ \theta,\ z)$ связаны с декартовыми координатами $(x,\ y,\ z)$ равенствами (см. рис. 12.19)

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z. \tag{7}$$

Здесь ρ — расстояние от проекции точки $A = (x,\ y,\ z)$ на плоскость $(x,\ y)$, до начала декартовой системы, а φ — угол радиус-вектора указанной проекции с осью x. Якобиан преобразования (7) равен

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\rho,\ \varphi,\ z)} = \rho.$$

§ 12.20. Общие свойства непрерывных операций

Ниже мы будем изучать операцию

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},\quad \mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \Omega \subset R,\quad \mathbf{x}' = (x_1',\ \ldots,\ x_n') \in \Omega' \subset R',$$

приводящую во взаимно однозначное соответствие $\Omega \rightleftarrows \Omega'$ некоторые множества $\Omega \subset R$ и $\Omega' \subset R'$.

Таким образом, существует обратная операция ($\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}'$ $(\mathbf{x}' \in \Omega')$).

Условимся в обозначениях. Если некоторая точка Ω' обозначена через $\mathbf{x}'$, то это значит, что $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \Omega)$; $\mathbf{e}' = A\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} \subset \Omega$; $\sigma_{\mathbf{x}}$, $\sigma_{\mathbf{x}'}$ — шары в R, соответственно в R', с центрами в точках $\mathbf{x}$ $(\in R)$, $\mathbf{x}'$ $(\in R')$.

Теорема 1. *Если операция A отображает непрерывно и взаимно однозначно замкнутое ограниченное множество F на множество F', то F' тоже ограничено и замкнуто и обратная операция A^{-1} непрерывна на F'.*

В самом деле, пусть $\mathbf{x}_l' \in F'$ $(l = 1,\ 2,\ \ldots)$, $\mathbf{y}_0 \in R'$ и $\mathbf{x}_l' \to \mathbf{y}_0$. Тогда существует подпоследовательность $\mathbf{x}_{l_k}$ и точка $\mathbf{x}_0 \in F$ (ограниченность и замкнутость F!) такая, что $\mathbf{x}_{l_k} \to \mathbf{x}_0$, и в силу непрерывности A на F имеет место $\mathbf{x}_{l_k}' = A\mathbf{x}_{l_k} \to A\mathbf{x}_0$. Следовательно, $\mathbf{y}_0 = A\mathbf{x}_0$ и F' — замкнутое множество. Оно ограничено, иначе существовала бы последовательность $\mathbf{x}_l'$ с $|\mathbf{x}_l'| \to \infty$, что невозможно, потому что для некоторой подпоследовательности $\mathbf{x}_{l_k}$ и некоторой точки $\mathbf{x}_0 \in F$ должно было бы быть $A\mathbf{x}_{l_k} \to A\mathbf{x}_0$.

Пусть теперь $\mathbf{x}_l'$, $\mathbf{x}_0' \in F'$ $(l = 1,\ 2,\ \ldots)$ и $\mathbf{x}_l' \to \mathbf{x}_0'$. Если бы точка $\mathbf{x}_l$ не стремилась к $\mathbf{x}_0$, то нашлись бы подпоследовательность $\mathbf{x}_{l_k}$ и точка $\mathbf{x}_* \neq \mathbf{x}_0$ (ограниченность и замкнутость F!) такие, что $\mathbf{x}_{l_k} \to \mathbf{x}_*$ $(k \to \infty)$, но тогда $\mathbf{x}_{l_k}' \to A\mathbf{x}_*$, и так как $\mathbf{x}_{l_k}' \to A\mathbf{x}_0$, то $A\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}_*$, и вследствие предположенной взаимной однозначности получили бы $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_*$, что противоречит сделанному предположению.

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 образ $(\sigma_{\mathbf{x}})'$ шара $\sigma_{\mathbf{x}} \subset F$ содержит в себе некоторый шар $\sigma_{\mathbf{x}'}$, т. е. если $g \subset F$ — открытое множество (или область), то открыто также и множество g' (соответственно область).*