Замечание. Операция (1) непрерывна на замыкании $\overline{\Lambda}$ области $\Lambda = \{0 < \rho < 1,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие $\Lambda \rightleftarrows \Lambda'$. Однако при этом нет взаимно однозначного соответствия точек границ Λ и Λ'.

Цилиндрические координаты (ρ, θ, z) связаны с декартовыми координатами (x, y, z) равенствами (см. рис. 12.19)

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z. \tag{7}$$

Здесь ρ — расстояние от проекции точки $A = (x, y, z)$ на плоскость (x, y), до начала декартовой системы, а φ — угол радиус-вектора указанной проекции с осью x. Якобиан преобразования (7) равен

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho.$$

§ 12.20. Общие свойства непрерывных операций

Ниже мы будем изучать операцию

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},\quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R,\quad \mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n') \in \Omega' \subset R',$$

приводящую во взаимно однозначное соответствие $\Omega \rightleftarrows \Omega'$ некоторые множества $\Omega \subset R$ и $\Omega' \subset R'$.

Таким образом, существует обратная операция $(\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}'\ (\mathbf{x}' \in \Omega'))$.

Условимся в обозначениях. Если некоторая точка Ω' обозначена через $\mathbf{x}'$, то это значит, что $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}\ (\mathbf{x} \in \Omega)$; $e' = Ae$, где $e \subset \Omega$; $\sigma_{\mathbf{x}}$, $\sigma_{\mathbf{x}'}$ — шары в R, соответственно в R', с центрами в точках $\mathbf{x}\ (\in R)$, $\mathbf{x}'\ (\in R')$.

Теорема 1. *Если операция A отображает непрерывно и взаимно однозначно замкнутое ограниченное множество F на множество F', то F' тоже ограничено и замкнуто и обратная операция A^{-1} непрерывна на F'.*

В самом деле, пусть $\mathbf{x}_l' \in F'\ (l = 1, 2, \ldots)$, $\mathbf{y}_0 \in R'$ и $\mathbf{x}_l' \to \mathbf{y}_0$. Тогда существует подпоследовательность $\mathbf{x}_{l_k}$ и точка $\mathbf{x}_0 \in F$ (ограниченность и замкнутость F!) такая, что $\mathbf{x}_{l_k} \to \mathbf{x}_0$, и в силу непрерывности A на F имеет место $\mathbf{x}_{l_k}' = A\mathbf{x}_{l_k} \to A\mathbf{x}_0$. Следовательно, $\mathbf{y}_0 = A\mathbf{x}_0$ и F' — замкнутое множество. Оно ограничено, иначе существовала бы последовательность $\mathbf{x}_l'$ с $|\mathbf{x}_l'| \to \infty$, что невозможно, потому что для некоторой подпоследовательности $\mathbf{x}_{l_k}$ и некоторой точки $\mathbf{x}_0 \in F$ должно было бы быть $A\mathbf{x}_{l_k} \to A\mathbf{x}_0$.

Пусть теперь $\mathbf{x}_l', \mathbf{x}_0' \in F'\ (l = 1, 2, \ldots)$ и $\mathbf{x}_l' \to \mathbf{x}_0'$. Если бы точка $\mathbf{x}_l$ не стремилась к $\mathbf{x}_0$, то нашлись бы подпоследовательность $\mathbf{x}_{l_k}$ и точка $\mathbf{x}_* \ne \mathbf{x}_0$ (ограниченность и замкнутость F!) такие, что $\mathbf{x}_{l_k} \to \mathbf{x}_*\ (k \to \infty)$, но тогда $\mathbf{x}_{l_k}' \to A\mathbf{x}_*$, и так как $\mathbf{x}_{l_k}' \to A\mathbf{x}_0$, то $A\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}_*$, и вследствие предположенной взаимной однозначности получили бы $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_*$, что противоречит сделанному предположению.

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 образ $(\sigma_{\mathbf{x}})'$ шара $\sigma_{\mathbf{x}} \subset F$ содержит в себе некоторый шар $\sigma_{\mathbf{x}'}$, т. е. если $g \subset F$ — открытое множество (или область), то открыто также и множество g' (соответственно область).*

Эта глубокая теорема (Брауэра) приводится без доказательства. Доказательство можно найти в книге: В. Гуревич и Г. Волмен, Теория размерности, ИЛ, 1948, стр. 64.

В случае, когда A — непрерывно дифференцируемая операция с не равным нулю на g якобианом, эта теорема доказана в § 7.18.

Теорема 3. *Пусть Ω — область, и непрерывная на Ω операция $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ приводит во взаимно однозначное соответствие множества Ω и Ω':*

$$\Omega \rightleftarrows \Omega' \quad (\mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{x}' \in \Omega').$$

Тогда

1) *если $g \subset \Omega$ — ограниченная область и $\bar{g} \subset \Omega$, то g имеет непустую границу γ; при этом g' — область, а ее граница есть γ';*

2) *если $g \subset \Omega$ — произвольная область, то g' — также область*; в частности, Ω' — область. Взаимно однозначного соответствия между границами g и g', в частности, между границами Ω и Ω' может и не быть (см. замечания в конце §§ 12.18 и 12.19).

Так как по условию утверждения 1) непрерывная операция A взаимно однозначно отображает замкнутые ограниченные множества γ, $g+\gamma$ соответственно на множества γ', $g'+\gamma'$, то последние по теореме 1 тоже ограничены и замкнуты, а g' как образ области $g \subset g+\gamma$ по теореме 2 есть область. Очевидно, граница g' принадлежит γ'. С другой стороны, если $v' \subset \Omega'$ есть шар с центром в $\mathbf{x}_0' \in \gamma'$, то на основании сказанного его прообраз v есть область, содержащая $\mathbf{x} \in \gamma$. Но тогда v' содержит в себе точки, принадлежащие и не принадлежащие g', потому что v содержит точки, принадлежащие и не принадлежащие g. Мы доказали, что γ' есть граница g'.

Пусть теперь $g \subset \Omega$ — произвольная область (не требуется ее ограниченность и принадлежность $\bar{g}$ области Ω!), $\mathbf{x}_0' \in g'$ и $\sigma_{x_0} \subset g$ — открытый шар (ограниченная область) такой, что $\bar{\sigma}_{x_0} \subset g$. По доказанному $(\sigma_{x_0})'$ есть область, содержащая, таким образом, в себе некоторый шар $\sigma_{x_0'}$, т. е. g' — открытое множество. Связность g' вытекает из связности g и непрерывности $A\mathbf{x}$.

Замечание. Пусть выполняются условия теоремы § 12.16 о замене переменных в кратном интеграле. Тогда имеют место утверждения:

1) Если Δ — (замкнутый) куб, содержащийся в Ω, то его открытое ядро отображается операцией A на открытое ядро Δ', а граница Δ — на границу Δ' (см. теорему 3, утверждение 1)).

2) Множество $\Omega_0 = \{D(\mathbf{x}) = 0\}$ не содержит в себе ни одного куба, потому что если бы некоторый куб $\Delta \subset \Omega_0$, то его открытое ядро отображалось бы операцией A на непустое открытое множество, поэтому $|\Delta'| > 0$, но, с другой стороны, $|\Delta'| = \int\limits_{\Delta} |D(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = 0$, и получилось бы противоречие.

§ 12.21. Дополнение к теореме о замене переменных в кратном интеграле

Пусть выполняются условия теоремы § 12.16, тогда не существует пары точек $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \Omega$ таких, что $D(\mathbf{y}) > 0$, $D(\mathbf{z}) < 0$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что такие точки существуют, тогда существует и куб $\Delta \subset \Omega$, где происходит перемена знака у D.

Чтобы доказать это, соединим $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ непрерывной кривой $C \subset \Omega$. Каждую точку C покроем принадлежащим Ω открытым кубом (с ребрами, параллельными осям!) с центром в ней. Среди этих кубов оставим конечное