Эта глубокая теорема (Брауэра) приводится без доказательства. Доказательство можно найти в книге: В. Гуревич и Г. Волмен, Теория размерности, ИЛ, 1948, стр. 64.

В случае, когда A — непрерывно дифференцируемая операция с не равным нулю на g якобианом, эта теорема доказана в § 7.18.

Теорема 3. *Пусть Ω — область, и непрерывная на Ω операция $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ приводит во взаимно однозначное соответствие множества Ω и Ω':*

$$\Omega \rightleftarrows \Omega' \quad (\mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{x}' \in \Omega').$$

Тогда

1) *если $g \subset \Omega$ — ограниченная область и $\bar{g} \subset \Omega$, то g имеет непустую границу γ; при этом g' — область, а ее граница есть γ';*

2) *если $g \subset \Omega$ — произвольная область, то g' — также область*; в частности, Ω' — область. Взаимно однозначного соответствия между границами g и g', в частности, между границами Ω и Ω' может и не быть (см. замечания в конце §§ 12.18 и 12.19).

Так как по условию утверждения 1) непрерывная операция A взаимно однозначно отображает замкнутые ограниченные множества γ, $g+\gamma$ соответственно на множества γ', $g'+\gamma'$, то последние по теореме 1 тоже ограничены и замкнуты, а g' как образ области $g \subset g+\gamma$ по теореме 2 есть область. Очевидно, граница g' принадлежит γ'. С другой стороны, если $v' \subset \Omega'$ есть шар с центром в $\mathbf{x}'_0 \in \gamma'$, то на основании сказанного его прообраз v есть область, содержащая $\mathbf{x} \in \gamma$. Но тогда v' содержит в себе точки, принадлежащие и не принадлежащие g', потому что v содержит точки, принадлежащие и не принадлежащие g. Мы доказали, что γ' есть граница g'.

Пусть теперь $g \subset \Omega$ — произвольная область (не требуется ее ограниченность и принадлежность $\bar{g}$ области Ω!), $\mathbf{x}'_0 \in g'$ и $\sigma_{x_0} \subset g$ — открытый шар (ограниченная область) такой, что $\bar{\sigma}_{x0} \subset g$. По доказанному $(\sigma_{x_0})'$ есть область, содержащая, таким образом, в себе некоторый шар $\sigma_{x'_0}$, т. е. g' — открытое множество. Связность g' вытекает из связности g и непрерывности $A\mathbf{x}$.

Замечание. Пусть выполняются условия теоремы § 12.16 о замене переменных в кратном интеграле. Тогда имеют место утверждения:

1) Если Δ — (замкнутый) куб, содержащийся в Ω, то его открытое ядро отображается операцией A на открытое ядро Δ', а граница Δ — на границу Δ' (см. теорему 3, утверждение 1)).

2) Множество $\Omega_0 = \{D(\mathbf{x}) = 0\}$ не содержит в себе ни одного куба, потому что если бы некоторый куб $\Delta \subset \Omega_0$, то его открытое ядро отображалось бы операцией A на непустое открытое множество, поэтому $|\Delta'| > 0$, но, с другой стороны, $|\Delta'| = \int\limits_{\Delta} |D(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = 0$, и получилось бы противоречие.

§ 12.21. Дополнение к теореме о замене переменных в кратном интеграле

Пусть выполняются условия теоремы § 12.16, тогда не существует пары точек $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \Omega$ таких, что $D(\mathbf{y}) > 0$, $D(\mathbf{z}) < 0$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что такие точки существуют, тогда существует и куб $\Delta \subset \Omega$, где происходит перемена знака у D.

Чтобы доказать это, соединим $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ непрерывной кривой $C \subset \Omega$. Каждую точку C покроем принадлежащим Ω открытым кубом (с ребрами, параллельными осям!) с центром в ней. Среди этих кубов оставим конечное число все же покрывающих C. Перенумеруем их $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ так, чтобы их центры следовали друг за другом вдоль ориентированной от $\mathbf{y}$ до $\mathbf{z}$ кривой C. Один из них обязательно удовлетворяет высказанному утверждению. В самом деле, если на Δ_1 имеет место перемена знака, то утверждение доказано. Если это не так, то пусть для определенности $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ на Δ_1 и пусть k — наибольшее среди j, для которых $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ на Δ_j $(j = 1, \ldots, k)$; тогда на Δ_{k+1} может быть либо перемена знака $D(\mathbf{x})$, либо $D(\mathbf{x}) \leqslant 0$. Но последнее невозможно, потому что на непустом прямоугольнике $\Delta_k\Delta_{k+1}$ было бы $D(\mathbf{x}) \equiv 0$ (см. замечание 2, § 12.20). Утверждение доказано.

Если внутри прямоугольника Δ имеет место перемена знака, т. е. существуют внутренние в Δ точки $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, для которых $D(\mathbf{y}) > 0$, $D(\mathbf{z}) < 0$, то эти точки всегда можно считать находящимися на одной из плоскостей $x_j = \alpha$ при некотором числе α.

В самом деле, определим состоящие из внутренних точек Δ кубы Δ', Δ'' с центрами соответственно в $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ так, что $D(\mathbf{x}) > 0$ на Δ' и $D(\mathbf{x}) < 0$ на Δ''. Пусть нижняя и верхняя в направлении $\mathbf{x}_1$ грани Δ' будут $x_1 = \alpha_1$, $x_1 = \alpha_2$ $(\alpha_1 < \alpha_2)$. Тогда, допуская, что высказанное утверждение неверно, придется заключить, что $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ на прямоугольнике $\Delta_{\alpha_1\alpha_2}$, состоящем из всех точек $\mathbf{x} \in \Delta$, у которых $\alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_2$. Кроме того, $D(\mathbf{x}) \leqslant 0$ для всех точек $\mathbf{x} \in \Delta$, принадлежащих прямоугольнику Π с образующей, параллельной оси x_1, опирающемуся на Δ''. Но тогда $D(\mathbf{x}) = 0$ на непустом пересечении $\Pi\Delta_{\alpha_1\alpha_2}$, содержащем в себе куб, что невозможно (см. замечание 2, § 12.20). На рис. 12.20 изображен плоский случай, где $\mathbf{x}'$ соответствует точке $\mathbf{y}$, а $\mathbf{x}''$ — точке $\mathbf{z}$.

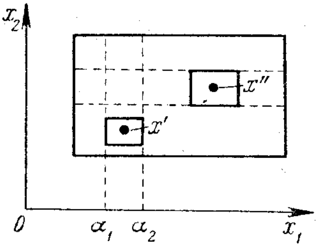

Рис. 12.20.

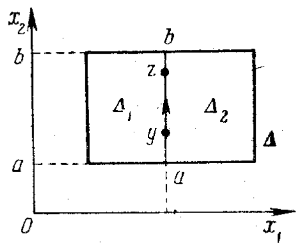

Рис. 12.21.

Перемены знака, о которой идет речь, вообще не может быть.

Рассмотрим двумерный открытый прямоугольник Δ (рис. 12.21). Ориентированный от a до b отрезок $[a, b]$ делит прямоугольник Δ на два открытых прямоугольника $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$. При помощи операции A отрезок $[a, b]$ переходит в ориентированный кусок непрерывной кривой*) a', b', разрезающий Δ' на две области Λ и Ω (рис. 12.22).

Таким образом, либо 1) $\Delta_2' = \Lambda$, либо 2) $\Lambda_2' = \Omega$. Но если допустить, что верно 1), то это противоречит неравенству $D(\mathbf{z}) < 0$, в силу которого точки Δ_2, близкие к $\mathbf{z}$, должны при помощи операции A перейти в точки, находящиеся слева от ориентированной кривой $a'b'$ по ее ходу, откуда бы следовало 2).

---

*) Определяющие кусок кривой $a'b'$ функции $x_1' = \varphi(x_1, x_2)$, $x_2' = \psi(x_1, x_2)$ от x_2 непрерывны вместе со своими первыми производными. Последние могут одновременно в некоторых точках x_2 быть равными нулю, но это не влияет на ход дальнейших рассуждений.

Наоборот, 2) противоречит неравенству $D(\mathbf{y}) > 0$, в силу которого точки Δ_2, близкие к z, переходят при преобразовании A в точки, находящиеся справа по ходу кривой $a'b'$.

Этим наше утверждение в двумерном случае доказано.

В трехмерном случае Δ есть трехмерный прямоугольник (прямоугольный параллелепипед). Роль направленного отрезка $[a, b]$ играет теперь прямоугольная площадка σ, вырезаемая из Δ плоскостью $x_1 = \alpha$. σ разрезает Δ на две части с открытыми ядрами Λ_1 и Λ_2. Ориентируем σ. Этим каждый гладкий замкнутый контур $\Gamma \subset \sigma$ получит определенное направление обхода, и в этом смысле σ' будет тоже соответственно ориентирована. Однако в точках σ, где $D(\mathbf{x}) = 0$, нормаль может и не существовать, и принятое определение ориентированности полностью неприменимо к σ'. Пусть $D(\mathbf{y}) > 0$, $D(\mathbf{z}) < 0$, где $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — внутренние точки Δ, лежащие на σ. На нормалях в точках $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}' \in \sigma'$ к σ' в Λ_1' выберем соответственно точки $\mathbf{y}''$, $\mathbf{z}''$ так, чтобы векторы $\overrightarrow{\mathbf{y}'\mathbf{y}''}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}'\mathbf{z}''}$ (без начальных точек) полностью принадлежали Λ'. Эти последние вместе с малыми, содержащими $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$, ориентированными площадками $\sigma'_{y'}$, $\sigma'_{z'} \subset \sigma'$ образуют штопоры. Штопор, выходящий из $\mathbf{y}'$, преобразованием A^{-1} переводится в одноименный $(D(\mathbf{y}) > 0)$, а выходящий из $\mathbf{z}'$ — в разноименный $(D(\mathbf{z}) < 0)$. Выходит, что Λ_1 имеет вблизи $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ точки, лежащие по разные стороны от σ, что невозможно.

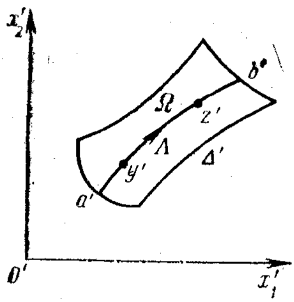

Рис. 12.22.

§ 12.22. Несобственный интеграл с особенностями вдоль границы области. Замена переменных

Лемма 1. *Пусть задана последовательность открытых множеств* Ω_1, Ω_2, Ω_3, ... *Тогда* $\Omega = \sum_1^\infty \Omega_k$ *есть открытое множество.*

Действительно, если точка $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, то найдется k, при котором $\mathbf{x}^0 \in \Omega_k$. Но Ω_k — открытое множество, и потому найдется шар V с центром в $\mathbf{x}^0$, содержащийся в Ω_k, следовательно, и в Ω.

Лемма 2. *При условиях леммы 1, если еще* $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$, *то, каково бы ни было замкнутое ограниченное множество* $F \subset \Omega$, *найдется такое* k, *при котором* $F \subset \Omega_k$.

Действительно, если бы это было не так, то для любого $k = 1, 2, \ldots$ нашлась бы точка $\mathbf{x}_k$, принадлежащая F, но не принадлежащая Ω_k. Так как F — ограниченное замкнутое множество, то из принадлежащей ему последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$, сходящуюся в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in F$ $(x_{k_j} \to x_0)$. Но $\mathbf{x}_0 \in F \subset \Omega$, следовательно, $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{k_0}$ при некотором k_0. Так как Ω_{k_0} открыто, то найдется шар V с центром в $\mathbf{x}^0$, принадлежащий Ω_{k_0}. Но шару V принадлежат точки x_{k_j} при достаточно больших j. Возьмем одну из них с $k_j > k_0$ для нее $x_{k_j} \in V \subset \Omega_{k_0} \subset \Omega_{k_j}$, и мы пришли к противоречию.

Лемма 3. *При условиях леммы 2, если еще* Ω *и* Ω_k *измеримы, то*

$$\lim_{k\to\infty} |\Omega_k| = |\Omega|. \tag{1}$$