Наоборот, 2) противоречит неравенству $D(\mathbf{y}) > 0$, в силу которого точки Δ_2, близкие к z, переходят при преобразовании A в точки, находящиеся справа по ходу кривой $a'b'$.

Этим наше утверждение в двумерном случае доказано.

В трехмерном случае Δ есть трехмерный прямоугольник (прямоугольный параллелепипед). Роль направленного отрезка $[a, b]$ играет теперь прямоугольная площадка σ, вырезаемая из Δ плоскостью $x_1 = \alpha$. σ разрезает Δ на две части с открытыми ядрами Λ_1 и Λ_2. Ориентируем σ. Этим каждый гладкий замкнутый контур $\Gamma \subset \sigma$ получит определенное направление обхода, и в этом смысле σ' будет тоже соответственно ориентирована. Однако в точках σ, где $D(\mathbf{x}) = 0$, нормаль может и не существовать, и принятое определение ориентированности полностью неприменимо к σ'. Пусть $D(\mathbf{y}) > 0$, $D(\mathbf{z}) < 0$, где $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — внутренние точки Δ, лежащие на σ. На нормалях в точках $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}' \in \sigma'$ к σ' в Λ_1' выберем соответственно точки $\mathbf{y}''$, $\mathbf{z}''$ так, чтобы векторы $\overrightarrow{\mathbf{y}'\mathbf{y}''}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}'\mathbf{z}''}$ (без начальных точек) полностью принадлежали Λ'. Эти последние вместе с малыми, содержащими $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$, ориентированными площадками $\sigma'_{y'}$, $\sigma'_{z'} \subset \sigma'$ образуют штопоры. Штопор, выходящий из $\mathbf{y}'$, преобразованием A^{-1} переводится в одноименный ($D(\mathbf{y}) > 0$), а выходящий из $\mathbf{z}'$ — в разноименный ($D(\mathbf{z}) < 0$). Выходит, что Λ_1 имеет вблизи $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ точки, лежащие по разные стороны от σ, что невозможно.

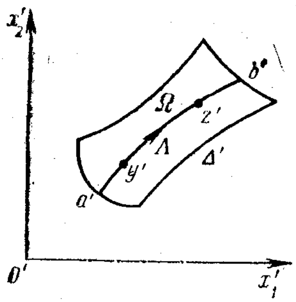

Рис. 12.22.

§ 12.22. Несобственный интеграл с особенностями вдоль границы области. Замена переменных

Лемма 1. *Пусть задана последовательность открытых множеств Ω_1, Ω_2, Ω_3, ... Тогда $\Omega = \sum_1^\infty \Omega_k$ есть открытое множество.*

Действительно, если точка $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, то найдется k, при котором $\mathbf{x}^0 \in \Omega_k$. Но Ω_k — открытое множество, и потому найдется шар V с центром в $\mathbf{x}^0$, содержащийся в Ω_k, следовательно, и в Ω.

Лемма 2. *При условиях леммы 1, если еще $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$, то, каково бы ни было замкнутое ограниченное множество $F \subset \Omega$, найдется такое k, при котором $F \subset \Omega_k$.*

Действительно, если бы это было не так, то для любого $k = 1, 2, \ldots$ нашлась бы точка $\mathbf{x}_k$, принадлежащая F, но не принадлежащая Ω_k. Так как F — ограниченное замкнутое множество, то из принадлежащей ему последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$, сходящуюся в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in F$ $(x_{k_j} \to x_0)$. Но $\mathbf{x}_0 \in F \subset \Omega$, следовательно, $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{k_0}$ при некотором k_0. Так как Ω_{k_0} открыто, то найдется шар V с центром в $\mathbf{x}^0$, принадлежащий Ω_{k_0}. Но шару V принадлежат точки x_{k_j} при достаточно больших j. Возьмем одну из них с $k_j > k_0$ для нее $x_{k_j} \in V \subset \Omega_{k_0} \subset \Omega_{k_j}$, и мы пришли к противоречию.

Лемма 3. *При условиях леммы 2, если еще Ω и Ω_k измеримы, то*

$$\lim_{k\to\infty} |\Omega_k| = |\Omega|. \qquad (1)$$

Доказательство. Очевидно, $|\Omega_k| \leqslant |\Omega_{k'}| \leqslant |\Omega|$ $(k \leqslant k')$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать замкнутое измеримое множество $F \subset \Omega$ такое, что $|F| > |\Omega| - \varepsilon$. В качестве F можно, например, взять фигуру, состоящую из кубиков $\Delta \subset \Omega$ достаточно густой прямоугольной сетки. Согласно лемме 2 найдется k_0, для которого $F \subset \Omega_{k_0}$. Для него $|\Omega| - \varepsilon < |F| < |\Omega_{k_0}| < |\Omega_k|$ $(k \geqslant k_0)$, и равенство (1) доказано.

Определение. Если на области Ω (не обязательно измеримой) задана функция $f(\mathbf{x})$, непрерывная, но неограниченная, то *несобственным интегралом* от $f(\mathbf{x})$ *по* Ω назовем предел

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\, d\mathbf{x}, \tag{2}$$

если он существует, где $\{\Omega_k\}$ — произвольная последовательность измеримых областей, обладающих следующим свойством:

$$\overline{\Omega}_k \subset \Omega, \quad \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots, \ \Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k. \tag{3}$$

Область Ω_k имеют гладкие (кусочно гладкие границы).

Предел считается существующим, если он есть одно и то же число для любой указанной последовательности $\{\Omega_k\}$. Конечно, для неотрицательной на Ω функции $f(\mathbf{x})$, если предел (2) существует для одной указанной последовательности $\{\Omega_k\}$, то он существует и для другой $\{\Omega'_k\}$ и равен ему, потому что, каково бы ни было k, найдется по лемме 2 такое $l = l(k)$, что $\overline{\Omega}_k \subset \Omega'_l$, и потому

$$\int_{\Omega_k} f\, d\mathbf{x} = \int_{\overline{\Omega}_k} f\, d\mathbf{x} \leqslant \int_{\Omega'_l} f\, d\mathbf{x},$$

откуда следует, что предел (2) по последовательности $\{\Omega_k\}$ не превышает такой предел по последовательности $\{\Omega'_k\}$, но тогда и наоборот, потому что рассуждения можно обратить.

Теорема. *Пусть преобразование*

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right. \qquad ((u, v) \in \Omega), \tag{4}$$

непрерывно дифференцируемое на замыкании $\overline{\Omega}$ *измеримой области с якобианом*

$$D(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad ((u, v) \in \Omega),$$

отображает взаимно однозначно Ω *на* Ω':

$$\Omega \rightleftarrows \Omega',$$

и на Ω' *задана непрерывная, но неограниченная функция* $f(x, y)$ *такая, однако, что функция*

$$F(u, v)\,|D(u, v)| = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,|D(u, v)|$$

равномерно непрерывна на Ω, *т. е. может быть продолжена по непрерывности на* $\overline{\Omega}$.

Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega'} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv, \tag{5}$$

где интеграл слева — несобственный в смысле введенного выше определения.

Доказательство. Зададим произвольную последовательность областей $\{\Omega_k'\}$, удовлетворяющих условиям (3) (где надо всюду над Ω поставить штрихи). Ей соответствует последовательность областей $\{\Omega_k\}$, которые в силу свойств непрерывных в обе стороны отображений тоже удовлетворяют условиям (3).

Имеем

$$\iint\limits_{\Omega_k'} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_k} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

в силу основной теоремы о замене переменных (ведь f непрерывна на $\overline{\Omega}_k'$), но (см. лемму 3)

$$\left|\iint\limits_{\Omega} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv - \iint\limits_{\Omega_k} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv\right| =$$

$$= \left|\iint\limits_{\Omega - \Omega_k} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv\right| \leqslant M\,|\Omega - \Omega_k| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

$$M \geqslant |F(u, v)\,D(u, v)| \qquad ((u, v) \in \overline{\Omega}),$$

и поэтому правая часть (6) сходится к правой части (5). Но тогда и левая часть (6) сходится к тому же числу, независимо от выбора последовательности $\{\Omega_k'\}$. Теорема доказана.

Заметим, что в силу свойств отображения (4) (с якобианом, не равным нулю на Ω!) гладкая (кусочно гладкая) граница Ω_k' переходит в гладкую (кусочно гладкую) границу Ω_k, что обеспечивает измеримость Ω_k.

Примеры см. в § 12.23, в частности, пример 1.

§ 12.23. Площадь поверхности

Зададим в трехмерном пространстве R, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), поверхность S, описываемую уравнением

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in \overline{G}). \tag{1}$$

Мы предполагаем, что G есть измеримая открытая область, а функция f имеет непрерывные частные производные

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

на $\overline{G}$ (см. § 7.11).

Согласно определению, введенному в § 7.19, наша поверхность есть гладкий кусок, проектируемый на плоскость $z = 0$.