Тогда имеет место равенство

$$\iint_{\Omega'} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv, \tag{5}$$

где интеграл слева — несобственный в смысле введенного выше определения.

Доказательство. Зададим произвольную последовательность областей $\{\Omega'_k\}$, удовлетворяющих условиям (3) (где надо всюду над Ω поставить штрихи). Ей соответствует последовательность областей $\{\Omega_k\}$, которые в силу свойств непрерывных в обе стороны отображений тоже удовлетворяют условиям (3).

Имеем

$$\iint_{\Omega'_k} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_k} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

в силу основной теоремы о замене переменных (ведь f непрерывна на $\overline{\Omega}'_k$), но (см. лемму 3)

$$\left|\iint_{\Omega} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv - \iint_{\Omega_k} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv\right| =$$

$$= \left|\iint_{\Omega-\Omega_k} F(u, v)\,|D(u, v)|\,du\,dv\right| \leqslant M\,|\Omega - \Omega_k| \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

$$M \geqslant |F(u, v)\,D(u, v)| \qquad ((u, v) \in \overline{\Omega}),$$

и поэтому правая часть (6) сходится к правой части (5). Но тогда и левая часть (6) сходится к тому же числу, независимо от выбора последовательности $\{\Omega'_k\}$. Теорема доказана.

Заметим, что в силу свойств отображения (4) (с якобианом, не равным нулю на Ω!) гладкая (кусочно гладкая) граница Ω'_k переходит в гладкую (кусочно гладкую) границу Ω_k, что обеспечивает измеримость Ω_k.

Примеры см. в § 12.23, в частности, пример 1.

§ 12.23. Площадь поверхности

Зададим в трехмерном пространстве R, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), поверхность S, описываемую уравнением

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in \overline{G}). \tag{1}$$

Мы предполагаем, что G есть измеримая открытая область, а функция f имеет непрерывные частные производные

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

на $\overline{G}$ (см. § 7.11).

Согласно определению, введенному в § 7.19, наша поверхность есть гладкий кусок, проектируемый на плоскость $z = 0$.

Произведем разбиение G на конечное число измеримых (в двумерном смысле) частей $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_N$, пересекающихся попарно разве что по своим границам. Пусть (x_j, y_j) — произвольная точка G_j $(j = 1, \ldots, N)$. Ей соответствует точка $P_j \in S$ с координатами (x_j, y_j, f_j), где $f_j = f(x_j, y_j)$. В точке P_j проведем плоскость L_j, касательную к S.

Обозначим через e_j кусок L_j $(e_j \subset L_j)$, проекцией которого на плоскость $z = 0$ служит множество G_j. Площадь e_j обозначим через $|e_j|$.

По определению *площадью поверхности* S называется предел

$$|S| = \lim_{\max(G_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} |e_j|.$$

Косинус острого угла нормали n_j к S в точке P_j с осью z (см. § 7.5, (13)) равен $\cos(n_j, z) = 1/\sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}$, где квадратный корень взят со знаком «+», а p_j, q_j обозначают результаты подстановки в p, q значений x_j, y_j. Мера G_j равна $|G_j| = |e_j| \cos(n_j, z)$,

$|e_j| = |G_j| \sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}$ $(j = 1, \ldots, N)$ и

$$|S| = \lim \sum_{j=1}^{N} |e_j| = \lim_{\max d(G_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{1 + p_j^2 + q_j^2}\, |G_j| =$$

$$= \iint_G \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \quad (2)$$

Мы получили формулу площади поверхности, заданной в явном виде (1).

Покажем, как преобразуется интеграл (2), если сделать в нем подстановку

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v) \quad ((u, v) \in \overline{\Omega}), \quad (3)$$

приводящую во взаимно однозначное соответствие измеримые области Ω и G в предположении, что φ и ψ непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$ и якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (4)$$

Положим $z = f(\varphi, \psi) = \chi(u, v)$. На основании теоремы о замене переменных в кратном интеграле получим равенство (см. § 7.26, (4))

$$\iint_G \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2} \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\, dv,$$

из которого следует, что площадь поверхности S выражается формулой

$$|S|=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}\,du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv. \qquad (5)$$

Отметим равенство

$$|r'_u\times r'_v|^2=EF-G^2,$$

где

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$G=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Формула (5) может служить основанием для определения понятия площади поверхности, заданной параметрически, не обязательно проектирующейся в целом на одну из плоскостей координат.

Пусть задана гладкая поверхность S:

$$\mathbf{r}=\varphi(u,v)\mathbf{i}+\psi(u,v)\mathbf{j}+\chi(u,v)\mathbf{k}$$

$$(|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|>0,\ (u,v)\in\Omega\rightleftarrows S), \qquad (6)$$

где Ω — измеримая область плоскости параметров (u, v), а φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные на $\overline{\Omega}$. Знак $\Omega\rightleftarrows S$ указывает на тот факт, что равенство (6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками Ω и S.

Так как Ω — измеримое множество, то оно ограничено и потому имеет не пустую границу γ. Она отображается при помощи равенства (6) на край $\Gamma=\overline{S}-S$ нашей поверхности. Мы не требуем, чтобы отображение γ на Γ было взаимно однозначным. Имеется много важных примеров, когда этого нет (см. примеры ниже).

По определению назовем *площадью* S (или $\overline{S}$) величину

$$|S|=\iint\limits_{\Omega}|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv. \qquad (7)$$

Перечислим ряд свойств интеграла (7), показывающих естественность введенного определения.

1) Величина $|S|$ инвариантна относительно допустимых преобразований параметров, т. е., если

$$u=\lambda(u', v'),\ v=\mu(u', v')\quad ((u', v')\in\Omega' \rightleftarrows \Omega),$$

где λ, μ непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}'$ и

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}\neq 0\qquad ((u', v')\in\Omega'),$$

то

$$\iint_\Omega |\dot{\mathbf r}_u\times\dot{\mathbf r}_v|\,du\,dv=\iint_\Omega\left\{\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2+\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2\right\}^{1/2}du\,dv=\iint_\Omega\left\{\left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2+\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2\right\}^{1/2}\left|\frac{D(u', v')}{D(u, v)}\right|\left|\frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right|du'dv'=\iint_\Omega|\dot{\mathbf r}_{u'}\times\dot{\mathbf r}_{v'}|\,du'\,dv'.$$

2) Пусть поверхность S проектируется на плоскость $z=0$. Точнее, пусть равенства

$$x=\varphi(u, v),\quad y=\psi(u, v)\quad (\Omega\rightleftarrows G\ni(x, y))\tag{8}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между измеримыми областями Ω и G с якобианом

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|\neq 0.\tag{9}$$

Тогда для функции $z=f(x, y)=\chi(u(x, y), v(x, y))$ $((x, y)\in G)$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — решения уравнений (8), в случае, если она имеет не только непрерывные (как это следует из теоремы о неявных функциях), но и равномерно непрерывные на G производные $p=\frac{\partial f}{\partial x}$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}$, имеет место равенство

$$|S|=\iint_\Omega|\dot{\mathbf r}_u\times\dot{\mathbf r}_v|\,du\,dv=\iint_G\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.\tag{10}$$

Оно уже было доказано выше (см. (5)).

Таким образом, новое определение площади поверхности совпадает с исходным определением, если имеет место ситуация, возможная для последнего.

Заметим, что если бы свойство равномерной непрерывности p и q на G не соблюдалось, а p и q были только непрерывными и ограниченными на G, то все равно выполнялось бы равенство (10), потому что все условия для замены переменных в интеграле и в этом случае соблюдаются.

Больше того, если p и q непрерывны, но неограничены на G (в то время как функции φ, ψ имеют непрерывные частные производные на $\overline{\Omega}$), то все равно равенство (10) остается верным, если понимать интеграл в его правой части в несобственном смысле (см. § 12.22).

3) Если ω есть произвольное открытое измеримое множество, содержащееся в $\Omega(\omega \subset \Omega)$, то соответствующая часть $S(\omega)$ нашей гладкой поверхности, определенная равенством

$$\mathbf{r}(u, v) = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k} \quad ((u, v) \in \omega \rightleftarrows S(\omega)), \tag{11}$$

есть в свою очередь гладкая поверхность, площадь которой равна

$$|S(\omega)| = \int\limits_{\omega}\int |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\, du\, dv. \tag{12}$$

Но интеграл справа в (12) имеет также смысл для произвольного измеримого подмножества $\omega \subset \overline{\Omega}$. Естественно считать, что его величина есть площадь части $S(\omega)$ гладкой поверхности S, описываемой вектор-функцией (11).

Очевидно, что

$$|S(\overline{\omega})| = |S(\omega)|.$$

и, в частности,

$$|\overline{S}| = |S(\overline{\Omega})| = |S(\Omega)| = |S|. \tag{13}$$

Итак, на поверхности (множестве) $\overline{S}$ можно различать некоторые ее части $S(\omega)$, которые соответствуют при помощи равенства (11) всевозможным измеримым подмножеством $\omega \subset \Omega$. Каждой такой части можно приписать неотрицательное число $|S(\omega)|$, площадь $S(\omega)$, определяемую интегралом (12). Эта зависимость (числа от подмножества) $S(\omega)$ к тому же обладает аддитивным свойством:

$$|S(\omega_1 + \omega_2)| = |S(\omega_1)| + |S(\omega_2)|,$$

если ω_1 и ω_2 пересекаются разве что по своим границам.

Величина $|S(\omega)|$ является конкретным примером важного в математике понятия *аддитивной функции множества*. С одним таким примером — мерой (измеримого) множества — мы оперируем давно.

Выражение $dS = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv$ называется *дифференциальным элементом поверхности* S. Площадь части S, соответствующей изменению u от u до $u + du$ и v от v до $v + dv$, равна

$$\Delta S = \int\limits_{u}^{u+du}\int\limits_{v}^{v+dv} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\, du\, dv = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|_{\substack{u=\xi\\ v=\eta}}\, du\, dv =$$

$$= (|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| + \varepsilon)\, du\, dv = dS + o(du\, dv) \quad (du,\ dv \to 0).$$

Во втором равенстве этой цепи применена теорема о среднем, в третьем в выражении $|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|$ заменена точка (ξ, η) на (u, v) за счет прибавления слагаемого ε, которое в силу непрерывности функции $|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|$ стремится к нулю при du, $dv \to 0$.

Таким образом, dS можно определить как (единственную!) величину вида $A\,du\,dv$, где A не зависит от du и dv, отличающуюся от ΔS на $o(du\,dv)$ $(du, dv \to 0)$.

Пример 1. Площадь шаровой поверхности. Уравнения

$$x = \cos\theta\cos\varphi,\quad y = \cos\theta\sin\varphi,\quad z = \sin\theta\quad (|\dot{\mathbf{r}}_\theta \times \dot{\mathbf{r}}_\varphi| = \cos\theta),$$
$$\Omega = \{0 < \varphi < 2\pi,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2\} \tag{14}$$

определяют гладкую поверхность S — часть шара радиуса 1 с центром в нулевой точке, из которого выброшен меридиан $\varphi = 0$, $|\theta| \leqslant \pi/2$. Условия (6) здесь выполняются. В частности, имеет место взаимно однозначное соответствие $\Omega \rightleftarrows S$. Однако уравнения (14) не устанавливают взаимно однозначного соответствия между $\gamma = \overline{\Omega} - \Omega$ и $\Gamma = \overline{S} - S$. Край Γ поверхности S есть указанный выше меридиан. Каждому из его концов в силу равенств (14) соответствует бесконечное множество точек γ, заполняющих противоположные стороны Ω, а каждой прочей точке Γ соответствует пара точек γ, лежащих на других противоположных сторонах γ.

Поверхность единичного шара есть замыкание $\overline{S}$ поверхности S, описанной параметрически уравнениями (14). На основании формулы (7)

$$|\overline{S}| = |S| = \iint_\Omega |\cos\theta|\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = 4\pi.$$

Заметим, что площадь поверхности нашего единичного шара $\overline{S}$ можно рассматривать как сумму площадей восьми конгруэнтных кусков, вырезаемых из $\overline{S}$ координатными плоскостями. Один из них σ, находящийся в положительном октанте, описывается непрерывной функцией $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(x,\ y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 1)$ с неограниченными частными производными

$$p = -x/\sqrt{1 - x^2 - y^2},\qquad q = -y/\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Мы уже отмечали, что в этом случае можно вычислять площадь σ по формуле (2) площади поверхности в декартовых координатах, понимая, однако, интеграл в несобственном смысле (см. конец § 13.13, замечание 1):

$$|\sigma| = \lim_{\rho\to 1}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2<1}\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \lim_{\rho\to 1}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2<1}\frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$
$$x > 0,\quad y > 0.$$

Формулу для элемента площади сферической поверхности радиуса R можно усмотреть из геометрических соображений. Сеть близких друг к другу меридианов и параллелей разрезает нашу шаровую поверхность S на элементарные частицы. Площадь ΔS такой частицы, близкой к точке $A = (R,\ \theta,\ \varphi)\ (\theta > 0)$, может быть, очевидно, оценена следующим образом:

$$R\cos(\theta + d\theta)\, d\varphi R\, d\theta < \Delta S < R\cos\theta\, d\varphi R\, d\theta.$$

Отсюда $(\theta < \theta' < \theta + d\theta)$

$$\Delta S = R^2\cos\theta'\, d\varphi\, d\theta = R^2\cos\theta\, d\varphi\, d\theta + d\varphi\, o(d\theta)\qquad (d\theta \to 0).$$

Пример 2. Площадь поверхности тора

$$x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi,\quad y = a\sin\theta\quad (0 < a < b),$$
$$z = (b + a\cos\theta)\sin\varphi\qquad (|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| = a(b + a\cos\theta) > 0). \tag{15}$$

Чтобы воспользоваться приведенными выше рассуждениями, придется эту поверхность рассматривать как замыкание $\overline{T}$ гладкой поверхности T, описываемой уравнениями (15), где $(\theta,\ \varphi)$ пробегает область $\Omega = \{0 < \theta,\ \varphi < 2\pi\}$.

В этом случае соотношения (6) и сопровождающие их условия непрерывной дифференцируемости будут выполняться, если считать $T = S$, поэтому

$$|\overline{T}| = |T| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a\cos\theta)\, d\theta = 2\pi a(2\pi b + 0) = 4\pi^2 ab.$$

Пример 3. Рассмотрим круговой цилиндр радиуса R и высоты H. Его боковую поверхность обозначим через σ, а ее площадь через $|\sigma|$. Разрежем σ равностоящими плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра так, чтобы соседние плоскости находились на расстоянии, равном H/N^3. Эти плоскости пересекают σ по окружностям $C_0, C_1, \ldots, C_{N^3}$, которые мы перенумеровали по порядку снизу вверх по направлению оси. Окружность C_0 разделим равноотстоящими точками на $2N$ равных частей. Эти точки мы тоже перенумеруем в порядке их следования по C_0, кроме того, через каждую из них проведем образующую нашей цилиндрической поверхности σ, которая пересечет окружности C_k в некоторых точках. Полученные точки на C_k мы тоже занумеруем, руководствуясь правилом, что точки всех C_k, лежащие на одной и той же образующей, имеют один и тот же номер. Теперь на окружностях C_k с четными k оставим только точки с четными номерами, а на окружностях C_k с нечетными k — только точки с нечетными номерами. В результате на поверхности σ нанесено некоторое конечное число точек. Каждые три соседние такие точки являются вершинами некоторого треугольника Δ, а вся совокупность последних образует некоторую многогранную поверхность σ_N, вписанную в σ. Чтобы не было недоразумений, отметим, что две из любых трех точек суть соседние точки, лежащие на C_k, а третья лежит на C_{k+1} или C_{k-1} и образующая, к которой она принадлежит, находится между (в меньшем центральном углу) образующими, к которым принадлежат первые две точки.

Число треугольников Δ, очевидно, равно $2N \cdot N^3 = 2N^4$, площадь же каждого Δ равна

$$|\Delta| = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{N} R \sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{N}\right)^2 + \left(\frac{H}{N^3}\right)^2} \sim \frac{\pi}{N} RR\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 > cN^{-3}$$

$$(N \to \infty, \quad c > 0).$$

Но тогда

$$|\sigma_N| > c_1 N^4 N^{-3} = c_1 N,$$

несмотря на то что при $N \to \infty$ диаметр Δ стремится к нулю.

Мы видим, что площадь поверхности нельзя определять как предел площади вписанной в нее многогранной поверхности со стремящимся к нулю максимальным диаметром ее грани. Такое определение неэффективно даже для очень простых поверхностей.