Глава 13

ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 13.1. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть в трехмерном пространстве E, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана непрерывная кусочно гладкая кривая Γ

$$x=\varphi(s), \quad y=\psi(s), \quad z=\chi(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant \Lambda), \tag{1}$$

где параметром служит длина дуги s. Таким образом, функции φ, ψ, χ непрерывны на $[0, \Lambda]$ и отрезок $[0, \Lambda]$ можно разбить на конечное число частей $0=s_0<s_1<\ldots<s_N=\Lambda$ так, что на каждом (замкнутом) частичном отрезке $[s_j, s_{j+1}]$ функции φ, ψ, χ имеют непрерывные производные, удовлетворяющие условию

$$\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2+\chi'(s)^2=1, \tag{2}$$

считая, что в концевых точках s_j, s_{j+1} они понимаются соответственно как правая и левая производные. Кривая Γ соответственно делится на конечное число гладких кусков $\Gamma=\sum_1^N \Gamma_j$. Пусть еще на Γ или на некотором множестве, содержащем Γ, задана функция $F(x, y, z)$, непрерывная на каждом гладком куске Γ_j, т. е. функция $F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))$, если имеет разрывы, то только в точках s_j и притом первого рода.

По определению, выражение

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\,ds=\int_0^\Lambda F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\,ds \tag{3}$$

называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции F вдоль кривой Γ (или по Γ).

Левая часть (3) есть обозначение криволинейного интеграла первого рода, а правая показывает, как его надо вычислять — это обычный риманов интеграл. Например, если кривая Γ обладает массой с плотностью распределения, равной $F(x, y, z)$ в точках $(x, y, z) \in \Gamma$, то общая масса кривой вычисляется посредством интеграла (3).

Пусть гладкая кривая Γ задана через произвольный параметр $t \in [a, b]$:

$$x=\varphi_1(t), \quad y=\psi_1(t), \quad z=\chi_1(t) \quad [a \leqslant t \leqslant b],$$

где, таким образом, φ_1, ψ_1, χ_1 — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $\varphi_1'^2+\psi_1'^2+\chi_1'^2>0$ на $[a, b]$. Параметр t выражается через длину дуги s кривой Γ при помощи некоторой функции $t=\lambda(s)$, $0\leqslant s\leqslant\Lambda$, имеющей не равную нулю непрерывную производную. Следовательно,

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} F(x, y, z)\,ds=\int\limits_0^{\Lambda} F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\,ds=\\ =\int\limits_a^b F(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\psi_1'(t)^2+\chi_1'(t)^2}\,dt,\\ \varphi_1(t)=\varphi[\lambda(t)],\quad \psi_1(t)=\psi[\lambda(t)],\quad \chi_1(t)=\chi[\lambda(t)],\\ ds=\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\psi_1'(t)^2+\chi_1'(t)^2}.\end{gathered}\tag{4}$$

Кривую Γ можно также задать уравнениями $x=\varphi(\Lambda-s)$, $y=\psi(\Lambda-s)$, $z=\chi(\Lambda-s)$ $(0\leqslant s\leqslant\Lambda)$, но величина интеграла (3) от этого не меняется:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{\Lambda} F(\varphi(\Lambda-s), \psi(\Lambda-s), \chi(\Lambda-s))\,ds=-\int\limits_{\Lambda}^{0} F(\varphi(s'), \psi(s'), \chi(s'))ds'=\\ =\int\limits_0^{\Lambda} F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\,ds.\end{gathered}$$

Таким образом, криволинейный интеграл первого рода по Γ не зависит от ориентации Γ.

§ 13.2. Криволинейный интеграл второго рода

Пусть в пространстве E, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана ориентированная непрерывная кусочно гладкая кривая Γ с начальной точкой A_0 и конечной A_1. Если кривая замкнута, то A_1 совпадает с A_0. Пусть

$$x=\varphi(s),\quad y=\psi(s),\quad z=\chi(s)\quad (0\leqslant s\leqslant\Lambda)\tag{1}$$

— уравнения Γ, где s — длина дуги Γ (см. § 10.3). При этом значению $s=0$ соответствует точка A_0, а значению $s=\Lambda$ — точка A_1 и возрастанию s соответствует ориентация Γ.

В каждой внутренней (не угловой) точке A любого гладкого куска Γ тогда однозначно определен единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$, касательный к Γ (в направлении возрастания s).

Пусть, кроме того, на Γ или на некотором открытом множестве Ω, содержащем Γ, задано поле непрерывного вектора (или задан вектор)

$$\mathbf{a}=P(x, y, z)\mathbf{i}+Q(x, y, z)\mathbf{j}+R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где, таким образом, P, Q, R — непрерывные функции на Γ (или Ω).