где, таким образом, φ_1, ψ_1, χ_1 — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $\varphi_1'^2 + \psi_1'^2 + \chi_1'^2 > 0$ на $[a, b]$. Параметр t выражается через длину дуги s кривой Γ при помощи некоторой функции $t = \lambda(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \Lambda$, имеющей не равную нулю непрерывную производную. Следовательно,

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds = \int_0^\Lambda F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\, ds =$$
$$= \int_a^b F(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \psi_1'(t)^2 + \chi_1'(t)^2}\, dt, \tag{4}$$
$$\varphi_1(t) = \varphi[\lambda(t)], \quad \psi_1(t) = \psi[\lambda(t)], \quad \chi_1(t) = \chi[\lambda(t)],$$
$$ds = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \psi_1'(t)^2 + \chi_1'(t)^2}.$$

Кривую Γ можно также задать уравнениями $x = \varphi(\Lambda - s)$, $y = \psi(\Lambda - s)$, $z = \chi(\Lambda - s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \Lambda)$, но величина интеграла (3) от этого не меняется:

$$\int_0^\Lambda F(\varphi(\Lambda - s), \psi(\Lambda - s), \chi(\Lambda - s))\, ds = -\int_\Lambda^0 F(\varphi(s'), \psi(s'), \chi(s'))ds' =$$
$$= \int_0^\Lambda F(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\, ds.$$

Таким образом, криволинейный интеграл первого рода по Γ не зависит от ориентации Γ.

§ 13.2. Криволинейный интеграл второго рода

Пусть в пространстве E, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана ориентированная непрерывная кусочно гладкая кривая Γ с начальной точкой A_0 и конечной A_1. Если кривая замкнута, то A_1 совпадает с A_0. Пусть

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant \Lambda) \tag{1}$$

— уравнения Γ, где s — длина дуги Γ (см. § 10.3). При этом значению $s = 0$ соответствует точка A_0, а значению $s = \Lambda$ — точка A_1 и возрастанию s соответствует ориентация Γ.

В каждой внутренней (не угловой) точке A любого гладкого куска Γ тогда однозначно определен единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$, касательный к Γ (в направлении возрастания s).

Пусть, кроме того, на Γ или на некотором открытом множестве Ω, содержащем Γ, задано поле непрерывного вектора (или задан вектор)

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где, таким образом, P, Q, R — непрерывные функции на Γ (или Ω), По определению *криволинейным интегралом от вектора* **a** *вдоль ориентированной кривой* Γ называется величина

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int_{\Gamma} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int_{\Gamma} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})\, ds = \int_{0}^{\Lambda} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})\, ds. \quad (2)$$

Первый и второй члены в (2) — это обозначения криволинейного интеграла от **a** по Γ, а третий и четвертый являются его определением и указывают, как его вычислить. Функция $(\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})$, вообще говоря, кусочно непрерывна с разрывами первого рода в угловых точках Γ. Третий член есть интеграл первого рода от нее по Γ. Мы считаем $d\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau}\, ds$, где, таким образом, $d\mathbf{s}$ есть вектор, имеющий длину ds и направление $\boldsymbol{\tau}$. Это объясняет обозначение криволинейного интеграла, выражаемое первым членом в (2).

Если Γ_- — та же кривая, но с противоположной ориентацией, то единичный вектор ее касательной равен $-\boldsymbol{\tau}$, поэтому $\int_{\Gamma_-} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = -\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s})$. Так как $\cos(\tau, x) = \varphi'(s)$, $\cos(\tau, y) = \psi'(s)$, $\cos(\tau, z) = \chi'(s)$, то криволинейный интеграл (2) может быть записан в виде

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int_{\Gamma} \{P\cos(\boldsymbol{\tau}, x) + Q\cos(\boldsymbol{\tau}, y) + R\cos(\boldsymbol{\tau}, z)\}\, ds =$$
$$= \int_{0}^{\Lambda} [P(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\,\varphi'(s) + Q(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\,\psi'(s) +$$
$$+ R(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\,\chi'(s)]\, ds, \quad (3)$$

где правая часть представляет собой обычный определенный интеграл.

Ориентированную гладкую кривую Γ можно задать при помощи некоторого параметра t посредством уравнений

$$x = \varphi_1(t),\ \ y = \psi_1(t),\ \ z = \chi_1(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T_0), \quad (4)$$

где $t = \lambda(s)$ — функция, имеющая на $[0, \Lambda]$ непрерывную производную $\lambda'(s) > 0$. Тогда интеграл (2) будет вычисляться по формуле

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int_{t_0}^{T_0} \big[P(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\,\varphi_1'(t) +$$
$$+ Q(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\,\psi_1'(t) + R(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))\,\chi_1'(t)\big]\, dt. \quad (5)$$

Мы произвели замену переменной s на t в определенном интеграле, стоящем справа в (3). В силу этой замены, например,

$$\varphi'(s)\,ds = \left(\varphi_1'(t)\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\,dt\right) = \varphi_1'(t)\,dt.$$

Второе выражение в (2) считается удобным обозначением криволинейного интеграла от **a** по ориентированной кривой Г. Его еще называют *криволинейным интегралом второго рода*. Оно не только обозначает этот интеграл, но и указывает, что надо сделать, чтобы его вычислить. Нужно кривую Г записать в виде уравнений (4) с параметром t, возрастающим соответственно ориентации Г, положить в указанном выражении $x = \varphi_1(t), \ldots, dx = \varphi_1'(t)\,dt, \ldots$ и вычислить определенный интеграл от полученной функции от t по отрезку $[t_0, T_0]$.

Ориентированную кривую Г можно рассматривать как сумму двух ориентированных кривых Γ_1, Γ_2, соответствующих изменению параметра s на отрезках $[0, s_*]$, $[s_*, \Lambda]$ $(0 < s_* < \Lambda)$. Тогда, очевидно

$$\int_\Gamma (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$
$$= \int_{\Gamma_1} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) + \int_{\Gamma_1} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

Если ориентированный контур Г замкнут, то взятый вдоль него криволинейный интеграл от **a** называют еще *циркуляцией вектора* **a** по Г.

Бывает так, что имеется несколько ориентированных кривых $C_1, \ldots, C_m$, вовсе не связанных друг с другом, и удобно обозначить через $C = C_1 + \ldots + C_m$ их объединение — тоже ориентированную кривую. Тогда по определению считают, что криволинейный интеграл от **a** по C равен сумме криволинейных интегралов от **a** по C_k:

$$\int_C = \sum_1^m \int_{C_k}.$$

Формула (5) верна не только для гладкой, но и для кусочно гладкой непрерывной кривой (4). Ведь тогда Г есть конечная сумма гладких ориентированных кусков Γ_j, соответствующих отрезкам $[s_j, s_{j+1}]$ или $[t_j, t_{j+1}]$ изменения дуги s или параметра t. Поэтому

$$\int_\Gamma (\mathbf{a}\,d\mathbf{s}) = \sum_1^N \int_{\Gamma_j} (\mathbf{a}\,d\mathbf{s}) = \sum_1^N \int_{t_j}^{t_{j+1}} = \int_0^{T_0},$$

где под интегралом справа подразумевается такое же выражение, как под интегралом справа в (5).

Наконец, заметим, что если **a** есть поле некоторой силы, то интеграл (криволинейный) от **a** по Г есть, очевидно, работа **a** вдоль ориентированного пути Г.

§ 13.3. Поле потенциала

Очень важным случаем поля вектора **a** является тот, когда на области G, где задано поле, существует функция $U(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные, для которых выполняются равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R \text{ (на } G).$$

Такую функцию U называют *потенциальной функцией вектора* **a**. Говорят еще (см. § 7.6), что вектор **a** есть *градиент функции* U, и пишут

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{a}.$$

Докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть на области $G \subset E$ задано поле вектора* **a**, *непрерывного на G. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Существует на G однозначная функция $U = U(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные, для которой на G выполняется равенство* $\operatorname{grad} U = \mathbf{a}$.

2) *Интеграл от* **a** *по любому замкнутому непрерывному кусочно гладкому контуру C, принадлежащему к G, равен нулю:*

$$\int_C (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0.$$

3) *Если A_0 — определенная фиксированная точка G, то интеграл* $\int\limits_{C_{A_0A}} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s})$ *по любой ориентированной кусочно гладкой кривой $C_{A_0A} \subset G$ с началом в A_0 и с концом в A зависит от A_0 и A, но не зависит от ее формы. Таким образом, при фиксированной точке A_0*

$$\int_{C_{A_0A}} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = V(A) = V(x, y, z).$$

Функция $V(x, y, z)$ есть потенциальная функция вектора **a** *на G (однозначная). Она отличается от U на константу.*

Доказательство. Из утверждения 1) следует 3). В самом деле, пусть на G существует функция U, потенциальная для **a**.

Зададим на G определенную точку $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и переменную точку $A = (x, y, z)$. Соединим A_0 с A непрерывной кусочно