Наконец, заметим, что если **a** есть поле некоторой силы, то интеграл (криволинейный) от **a** по Γ есть, очевидно, работа **a** вдоль ориентированного пути Γ.

§ 13.3. Поле потенциала

Очень важным случаем поля вектора **a** является тот, когда на области G, где задано поле, существует функция $U(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные, для которых выполняются равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R \text{ (на } G).$$

Такую функцию U называют *потенциальной функцией вектора* **a**. Говорят еще (см. § 7.6), что вектор **a** есть *градиент функции* U, и пишут

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{a}.$$

Докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть на области* $G \subset E$ *задано поле вектора* **a**, *непрерывного на* G. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1 *Существует на* G *однозначная функция* $U = U(x, y, z)$, *имеющая непрерывные частные производные, для которой на* G *выполняется равенство* $\operatorname{grad} U = \mathbf{a}$.

2) *Интеграл от* **a** *по любому замкнутому непрерывному кусочно гладкому контуру* C, *принадлежащему к* G, *равен нулю:*

$$\int_C (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0.$$

3) *Если* A_0 — *определенная фиксированная точка* G, *то интеграл* $\int\limits_{C_{A_0 A}} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s})$ *по любой ориентированной кусочно гладкой кривой* $C_{A_0 A} \subset G$ *с началом в* A_0 *и с концом в* A *зависит от* A_0 *и* A, *но не зависит от ее формы. Таким образом, при фиксированной точке* A_0

$$\int_{C_{A_0 A}} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = V(A) = V(x, y, z).$$

Функция $V(x, y, z)$ *есть потенциальная функция вектора* **a** *на* G (*однозначная*). *Она отличается от* U *на константу.*

Доказательство. Из утверждения 1) следует 3). В самом деле, пусть на G существует функция U, потенциальная для **a**.

Зададим на G определенную точку $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и переменную точку $A = (x, y, z)$. Соединим A_0 с A непрерывной кусочно гладкой кривой $C = C_{A_0A}$, определенной уравнениями

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau), \quad z = \chi(\tau) \qquad (t_0 \leqslant \tau \leqslant t).$$

Таким образом, значениям t_0 и t параметра τ соответствуют точки A_0 и A.

Если подставить в U вместо x, y, z соответственно функции φ, ψ, χ, то U будет непрерывной кусочно гладкой функцией от τ. На основании теоремы о производной сложной функции в точках гладкости C (где C имеет касательную)

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{d\chi}{d\tau}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dU}{d\tau}\,d\tau =$$

$$= U(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) - U(\varphi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0)) =$$

$$= U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U(A) - U(A_0) = V(A),$$

т. е. криволинейный интеграл при фиксированной точке A_0 зависит только от положения точки $A \in G$, но не от пути, по которому она достигается из точки A_0.

Наоборот, из 3) следует 1). В самом деле, зададим фиксированную точку $A_0 \in G$. Пусть известно, что данное поле вектора $\mathbf{a}$ таково, что криволинейный интеграл по любой кусочно гладкой кривой, соединяющей A_0 с произвольной точкой $A \in G$, не зависит от этой кривой, а зависит только от точки A. Таким образом, существует функция $V(A)$ такая, что

$$\int\limits_{C_{A_0A}} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = V(A) = V(x, y, z).$$

Чтобы доказать, что $\dfrac{\partial V}{\partial x} = P$ в точке $A = (x, y, z)$, принадлежащей G, будем рассуждать следующим образом. В пределах области G проведем отрезок A_2A_1, параллельный оси x, где $A_2 = (x_2, y, z)$, $A_1 = (x, y, z)$, $x_2 \leqslant x \leqslant x_1$. Соединим A_0 с $A_2 = (x_2, y_1, z_1)$ произвольной непрерывной, кусочно гладкой, ориентированной в направлении от A_0 к A_2 кривой C_1 и обозначим через C' отрезок A_2A, ориентированный от A_2 к $A \in A_2A_1$. Тогда $C = C_1 + C'$ (рис. 13.1) и

$$V(x, y_1, z_1) = \int\limits_{C_1} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) + \int\limits_{C'} P\,dx, \tag{1}$$

так как очевидно, что $\int\limits_{C'} Q\,dy = \int\limits_{C'} R\,dz = 0.$

Кривая C_1 в дальнейшем рассуждении не будет изменяться, и потому первый интеграл в правой части (1) можно считать константой, которую мы обозначим через K. Таким образом,

$$V(x, y, z) = K + \int_{x_2}^{x} P(t, y, z)\,dt.$$

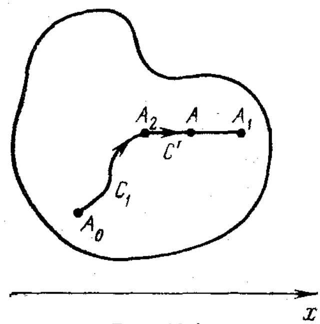

Рис. 13.1.

Функция P непрерывна, в частности, непрерывна по x, поэтому $\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y, z)$ и мы доказали нужное равенство. Аналогично доказываются равенства

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R,$$

строя специальные, соединяющие точки A_0 и A_1, кривые, заканчивающиеся при подходе к A_1 отрезками, в первом случае параллельными оси y, и во втором — оси z. Мы доказали 1) при $U = V$.

Эквивалентность 2) и 3) тривиальна. В самом деле, пусть имеет место 2) и $C' = C'_{A_0A}$, $C'' = C''_{A_0A}$ — два принадлежащих к G пути, соединяющих точки A_0 и A. Тогда $C' + C''_{-}$ — замкнутый контур и

$$0 = \int_{C'} + \int_{C''_{-}} = \int_{C'} - \int_{C''},$$

т. е. выполняется 3). Наоборот, если имеет место 3) и $C \subset G$ — замкнутый контур, то, представив его в виде суммы $C = C' + C''$ каких-либо контуров, получим

$$\int_{C} = \int_{C'} + \int_{C''} = \int_{C'} - \int_{C''_{-}} = 0,$$

так как C' и C''_{-} соединяют одну и ту же пару точек.

Если определенный на открытом множестве G вектор

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

является не только непрерывным, но и имеет непрерывные частные производные, то имеет смысл вектор

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

называемый *ротором вектора* $\mathbf{a}$.

Если для вектора $\mathbf{a}$ выполняется одно из утверждений 2) или 3) предыдущей теоремы, то на основании этой теоремы на G

можно определить однозначную (потенциальную) функцию $U(x, y, z)$, имеющую непрерывные частные производные, так что $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$.

В таком случае, если функции P, Q, R имеют на G непрерывные частные производные, то U имеет непрерывные частные производные второго порядка и имеют место равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} = 0.$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 2. *Если поле вектора* **a**, *имеющего на открытом множестве G непрерывные частные производные, обладает тем свойством, что для любого ориентированного кусочно гладкого замкнутого контура $C \subset G$*

$$\int_C (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0, \tag{2}$$

то

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ на } G. \tag{3}$$

Обратная теорема для произвольного, пусть даже связного, множества G не верна. Но она верна во всяком случае, если $G = \{a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2,\ a_3 \leqslant z \leqslant b_3\}$ есть прямоугольный параллелепипед). В этом случае для определенного на G непрерывно дифференцируемого вектора **a**, имеющего $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$, эффективно строится его потенциал по формуле

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(u, y_0, z_0)\, du + \int_{y_0}^{y} Q(x, v, z_0)\, dv + \int_{z_0}^{z} R(x, y, v)\, dv + U(x_0, y_0, z_0) \quad ((x, y, z) \in G), \tag{4}$$

где $(x_0, y_0, z_0) \in G$ — произвольная фиксированная точка и $U(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная константа. В самом деле (пояснения ниже),

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, v, z_0)\, dv + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, w)\, dw =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x, v, z_0)\, dv + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, w)\, dw =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + [P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0)] +$$
$$+ [P(x, y, z) - P(x, y, z_0)] = P(x, y, z),$$

где мы применили формулу Ньютона — Лейбница, свойство (3), и, кроме того, дифференцирование под знаком интеграла. То, что последнее в данном случае законно, будет обосновано позже (в § 13.12). Аналогично доказывается, что $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$. Таким образом, $\operatorname{grad} U = \mathbf{a}$ и, следовательно, выполняются равенства (2) для любого ориентированного (замкнутого) контура $C \subset G$.

Заметим, что правая часть (4) без последнего члена представляет собой криволинейный интеграл от вектора вдоль трехзвенной ломаной.

Но имеет место более общая

Теорема 3. *Пусть область G односвязна, т. е. такова, что любой принадлежащий ей кусочно гладкий контур можно стянуть в точку $P^0 \subset G$ так, что в процессе стягивания*) он будет находиться в G. Тогда из того, что определенный на G непрерывно дифференцируемый вектор* $\mathbf{a}$ *имеет* $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$, *следует выполнение равенства* (2) *для любого ориентированного замкнутого контура $C \subset G$.*

Доказательство ниже. Таким образом, из теоремы 3 следует существование определенной на G однозначной функции, потенциальной для вектора $\mathbf{a}$ на G.

Область, находящаяся между двумя концентрическими шаровыми поверхностями, удовлетворяет условию теоремы, между тем как область, представляющая собой все пространство без оси z, не удовлетворяет этому условию, и в этом последнем случае можно указать пример (см. ниже) поля вектора, для которого теорема 3 не верна.

В дальнейшем будут доказаны теоремы Грина и Стокса. Применение их приводит к неполному доказательству теоремы 3 и уж во всяком случае может служить неплохим наводящим соображением справедливости этой теоремы (см. замечание в конце § 13.11).

Все понятия и теоремы, о которых была речь выше, легко переносятся на плоский случай. В плоскости E рассматриваются произвольные кусочно гладкие ориентированные кривые

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b;\ a < b),$$

---

*) Математическое описание понятия «стягивание в одну точку» дается в конце этого параграфа мелким шрифтом.

принадлежащие заданной области G. На G задается поле непрерывного вектора $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$.

Криволинейный интеграл от $\mathbf{a}$ по кривой C определяется в точности так же, как в трехмерном случае. Его можно рассматривать как частный случай § 13.2, (3), полагая

$$R \equiv 0,\ P = P(x, y) \quad \text{и} \quad Q = Q(x, y).$$

Таким образом,

$$\int_C (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int_C (P\,dx + Q\,dy) = \\ = \int_a^b \{P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt.$$

Теперь уже потенциальная функция U вектора $\mathbf{a}$, если она существует на G, есть однозначная определенная на G функция $U = U(x, y)$ от двух переменных. Ее градиент

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathbf{j} = \mathbf{a}.$$

Пример 1. Вектор $\mathbf{a}$ с компонентами

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

имеет непрерывные частные производные на области G, представляющей собой плоскость с выкинутой нулевой точкой. Легко проверить, кроме того, что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ на G. Область G не удовлетворяет условию теоремы 3, и сама теорема в данном случае неверна.

В самом деле, введем область G^*, полученную из плоскости (x, y) выкидыванием из нее отрицательного луча $x < 0$ оси x. На G^* согласно теореме 3 существует функция U с $\operatorname{grad} U = \mathbf{a}$. Ее можно определить в переменной точке (x, y), например, как криволинейный интеграл от $\mathbf{a}$ по любому пути $C \subset G^*$, соединяющему фиксированную точку, пусть $(1, 0)$ с (x, y):

$$U(x, y) = \int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

Однако *эта функция не может быть продолжена с G^* на всю плоскость так, чтобы она была там однозначной и непрерывной.*

В самом деле, значение $U(x, y)$ в произвольной точке $(\cos\theta, \sin\theta) \in G^*$ окружности радиуса 1 с центром в нулевой точке равно

$$U(\cos\theta, \sin\theta) = \int_0^\theta d\theta = \theta.$$

Чтобы прийти в точку $(-1, 0)$ (лежащую на выкинутом луче), мы можем двигаться по нашей окружности, увеличивая θ до π или уменьшая θ до $-\pi$. В первом случае предельное значение U будет равно π, а во втором $-\pi$, т. е. функция U не может быть продолжена нужным образом на всю плоскость.

Так как произвольная потенциальная для $\mathbf{a}$ на G функция должна отличаться от рассмотренной функции $U(x, y)$ на постоянную, то доказано, что вообще не существует определенной на G однозначной функции, которая была бы потенциальной для вектора $\mathbf{a}$ (всюду на G).

Мы сознательно провели сравнительно длинное рассуждение, чтобы обосновать это утверждение. Его можно заменить следующим, более кратким. Существуют замкнутые, принадлежащие к G гладкие контуры такие, что интегралы от нашего вектора $\mathbf{a}$ по ним не равны нулю. Например, таким контуром является окружность радиуса 1 с центром в нулевой точке— для нее $\int\limits_C (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$. Но тогда на G не может быть определена однозначная функция U, потенциальная для $\mathbf{a}$ (всюду на G!), потому что существование такой функции противоречило бы теореме 1.

Доказательство теоремы 3. Оно основано на том, что она верна, если G есть куб.

Зададим произвольный замкнутый кусочно гладкий контур $\Gamma \subset G$:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \chi(u), \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$
$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \psi(0) = \psi(1), \quad \chi(0) = \chi(1).$$

Здесь параметр u пробегает отрезок $[0, 1]$ что, очевидно, не уменьшает общности. Тот факт, что контур Γ указанным в теореме 3 образом стягивается в точку, описывается так: существует поверхность $S \subset G$, описываемая функциями

$$\left.\begin{array}{c} x = \varphi(u, t), \quad y = \psi(u, t), \quad z = \chi(u, t), \\ \{0 \leqslant u \leqslant t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\} = \Delta, \\ \varphi(0, t) = \varphi(t, t), \quad \psi(0, t) = \psi(t, t), \quad \chi(0, t) = \chi(t, t), \end{array}\right\} \tag{5}$$

непрерывными на треугольнике Δ и кусочно гладкими по u на $[0, t]$ и такими, что

$$\varphi(u, 1) = \varphi(u), \quad \psi(u, 1) = \psi(u), \quad \chi(u, 1) = \chi(u).$$

Так как S ограничена и замкнута, G открыто и $S \subset G$, то найдется число $d > 0$ такое, что, какова бы ни была точка $A \in S$, любой покрывающий ее куб с ребром длины d принадлежит G.

Будем обозначать через σ кубы, принадлежащие G.

Будем говорит, что множество $e' \subset S$ есть образ множества $e \subset \Delta$, если e' есть совокупность точек, полученных как отображения точек e при помощи трех функций (5).

Рассечем Δ прямоугольной сетки (рис. 13.2), настолько густой, чтобы образы полученных частиц помещались в кубах σ с ребром d.

Образ нижнего треугольника A_1B_1O принадлежит некоторому σ. Так как образы точек A_1 и B_1 совпадают, т. е. есть одна точка S, то образ отрезка A_1B_1 есть замкнутая кусочно гладкая кривая $C_{A_1B_1}$, принадлежащая кубу σ, поэтому

$$\int\limits_{C_{A_1B_1}} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0. \tag{6}$$

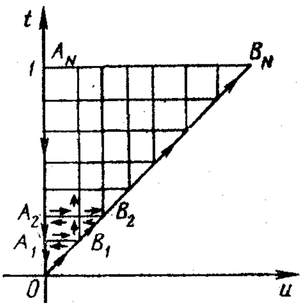

Рис. 13.2.

Ориентируем согласованно все частицы (их две) между A_1B_1 и A_2B_2 (см. рис. 13.2). Интеграл по образу этого сложного контура равен сумме интегралов по образам границ отдельных указанных частиц, каждый из которых равен нулю. Но интегралы по отрезкам, по которым соседние частицы граничат, компенсируют друг друга, кроме того, имеет место (6) и равенство

$$\int\limits_{C_{A_1A_2}} = \int\limits_{C_{B_1B_2}}$$

потому что образы A_1A_2 и B_1B_2 совпадают.

Поэтому $\int\limits_{C_{A_2B_2}} = 0$. Рассуждая аналогично, по индукции мы получим, что

$$\int\limits_{C_{A_kB_k}} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

и так как $C_{A_NB_N} = \Gamma$, то $\int\limits_{\Gamma}(\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0$, что и требовалось доказать.

§ 13.4. Ориентация плоской области

В плоскости можно задать две прямоугольные системы координат, изображенные на рис. 13.3 и 13.4.

Они существенно отличны друг от друга в том смысле, что невозможно, передвигая обе геометрические системы в плоскости как твердые тела, совместить их так, чтобы одновременно совпали положительные направления их осей x и положительные направления их осей y.

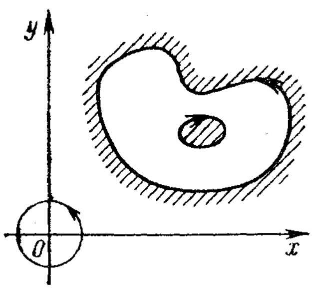

Рис. 13.3.

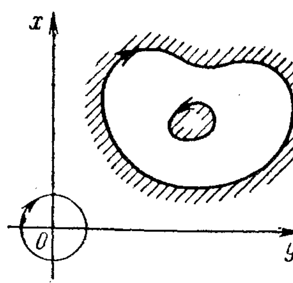

Рис. 13.4.

Зададим в обеих системах кооординат круги с центром в точках 0. На окружностях кругов зададим положительные направления обхода так, что, двигаясь по ним, проходится кратчайшее расстояние от положительного направления оси x до положительного направления оси y (четверть окружности, а не три четверти). В случае системы, изображенной на рис. 13.3, для этого придется