ралов по образам границ отдельных указанных частиц, каждый из которых равен нулю. Но интегралы по отрезкам, по которым соседние частицы граничат, компенсируют друг друга, кроме того, имеет место (6) и равенство

$$\int\limits_{C_{A_1A_2}} = \int\limits_{C_{B_1B_2}}$$

потому что образы A_1A_2 и B_1B_2 совпадают.

Поэтому $\int\limits_{C_{A_2B_2}} = 0$. Рассуждая аналогично, по индукции мы получим, что

$$\int\limits_{C_{A_kB_k}} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

и так как $C_{A_NB_N} = \Gamma$, то $\int\limits_{\Gamma}(\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = 0$, что и требовалось доказать.

§ 13.4. Ориентация плоской области

В плоскости можно задать две прямоугольные системы координат, изображенные на рис. 13.3 и 13.4.

Они существенно отличны друг от друга в том смысле, что невозможно, передвигая обе геометрические системы в плоскости как твердые тела, совместить их так, чтобы одновременно совпали положительные направления их осей x и положительные направления их осей y.

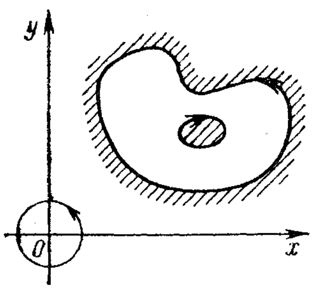

Рис. 13.3.

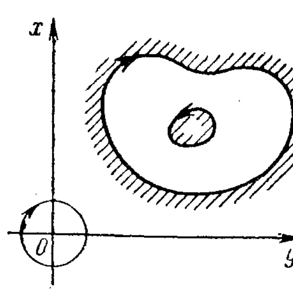

Рис. 13.4.

Зададим в обеих системах кооординат круги с центром в точках 0. На окружностях кругов зададим положительные направления обхода так, что, двигаясь по ним, проходится кратчайшее расстояние от положительного направления оси x до положительного направления оси y (четверть окружности, а не три четверти). В случае системы, изображенной на рис. 13.3, для этого придется взять направление обхода круга против часовой стрелки, а в случае рис. 13.4 — по часовой стрелке.

В первом случае, двигаясь по окружности в положительном направлении, мы оставляем внутренние точки обходимого круга слева, а во втором случае — справа. Это обстоятельство дает основание для дальнейших обобщений.

Пусть задана область Ω с кусочно гладкой границей C, которая может состоять из конечного числа замкнутых, самонепересекающихся контуров, так что Ω находится внутри одного из них и вне остальных. Зададим на C направление обхода так, чтобы при движении по C в этом направлении область оставалась слева (см. рис. 13.3). Такое *направление обхода* в случае первой системы называется *положительным*, а противоположное — *отрицательным*. Если область Ω задана во второй системе, положительное направление соответствует такому обходу, что при этом область остается справа (см. рис. 13.4).

§ 13.5. Формула Грина*). Выражение площади через криволинейный интеграл

Для достаточно общих плоских областей Ω с положительно ориентированной границей Γ справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\Gamma}(P\,dx+Q\,dy), \tag{1}$$

называемая *формулой Грина*. Здесь предполагается, что $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{\Omega}$.

Докажем формулу Грина для прямоугольника (рис. 13.5)

$$\Delta=\{a<x<b;\ c<y<d\}.$$

$$\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int\limits_{c}^{d}\int\limits_{a}^{b}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{c}^{d}[Q(b,y)-Q(a,y)]\,dy=\left(\int\limits_{\Gamma_{BC}}+\int\limits_{\Gamma_{DA}}\right)Q(x,y)\,dy=\int\limits_{\Gamma}Q(x,y)\,dy,$$

$$-\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=-\int\limits_{a}^{b}[P(x,d)-P(x,c)]\,dx=$$

$$=\left(\int\limits_{\Gamma_{CD}}+\int\limits_{\Gamma_{AB}}\right)P(x,y)\,dx=\int\limits_{\Gamma}P(x,y)\,dx,$$

и формула (1) доказана.

*) Д. Грин (1793—1841) — английский математик. Другой вывод формулы Грина см. § 13.10.