взять направление обхода круга против часовой стрелки, а в случае рис. 13.4 — по часовой стрелке.

В первом случае, двигаясь по окружности в положительном направлении, мы оставляем внутренние точки обходимого круга слева, а во втором случае — справа. Это обстоятельство дает основание для дальнейших обобщений.

Пусть задана область Ω с кусочно гладкой границей C, которая может состоять из конечного числа замкнутых, самонепересекающихся контуров, так что Ω находится внутри одного из них и вне остальных. Зададим на C направление обхода так, чтобы при движении по C в этом направлении область оставалась слева (см. рис. 13.3). Такое *направление обхода* в случае первой системы называется *положительным*, а противоположное — *отрицательным*. Если область Ω задана во второй системе, положительное направление соответствует такому обходу, что при этом область остается справа (см. рис. 13.4).

§ 13.5. Формула Грина *). Выражение площади через криволинейный интеграл

Для достаточно общих плоских областей Ω с положительно ориентированной границей Γ справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\Gamma}(P\,dx+Q\,dy), \tag{1}$$

называемая *формулой Грина*. Здесь предполагается, что $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{\Omega}$.

Докажем формулу Грина для прямоугольника (рис. 13.5)

$$\Delta=\{a<x<b;\ c<y<d\}.$$

$$\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int\limits_{c}^{d}\int\limits_{a}^{b}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{c}^{d}[Q(b,y)-Q(a,y)]\,dy=\left(\int\limits_{\Gamma_{BC}}+\int\limits_{\Gamma_{DA}}\right)Q(x,y)\,dy=\int\limits_{\Gamma}Q(x,y)\,dy,$$

$$-\iint\limits_{\Delta}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=-\int\limits_{a}^{b}[P(x,d)-P(x,c)]\,dx=$$

$$=\left(\int\limits_{\Gamma_{CD}}+\int\limits_{\Gamma_{AB}}\right)P(x,y)\,dx=\int\limits_{\Gamma}P(x,y)\,dx,$$

и формула (1) доказана.

*) Д. Грин (1793—1841) — английский математик. Другой вывод формулы Грина см. § 13.10.

Докажем теперь (1) для области ω, изображенной на рис. 13.6, где дуга $\smile{AC}$ описывается непрерывной строго возрастающей на $[a, b]$ функцией $y=\lambda(x)$. Обратную к ней функцию обозначим через $x=\mu(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$.

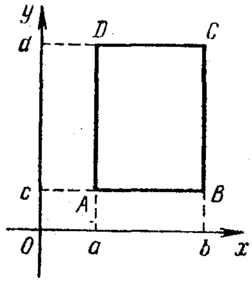

Рис. 13.5.

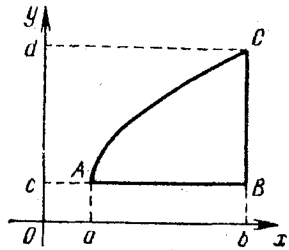

Рис. 13.6.

Имеем

$$\iint\limits_{\omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_{c}^{d} [Q(b, y) - Q(\mu(y), y)]\, dy =$$

$$= \left(\int\limits_{\Gamma_{BC}} - \int\limits_{\Gamma_{AC}} \right) Q(x, y)\, dy = \int\limits_{\Gamma} Q(x, y)\, dy,$$

$$-\iint\limits_{\omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int\limits_{a}^{b} \int\limits_{c}^{\lambda(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\, dx = -\int\limits_{a}^{b} [P(x, \lambda(x)) - P(x, c)]\, dx =$$

$$= \left(\int\limits_{\Gamma_{CA}} + \int\limits_{\Gamma_{AB}} \right) P(x, y)\, dx = \int\limits_{\Gamma} P(x, y)\, dx,$$

откуда и следует (1).

Если повернуть область ω как твердое тело вокруг начала координат на угол $\pi/2$, π, $3\pi/2$, оставив систему координат неизменной, то мы получим еще три множества, которые вместе с ω мы будем называть *множествами типа* ω. Заодно будем всякий прямоугольник называть *областью типа* ω. По аналогии доказывается, что формула Грина имеет место для любого множества типа ω.

Справедлива

Теорема. *Пусть область Ω с непрерывной кусочно гладкой границей Γ обладает тем свойством, что ее замыкание $\overline{\Omega}$ может быть разрезано прямыми, параллельными осям координат (x, y), на конечное число частей, каждая из которых есть область типа ω. Тогда для Ω справедлива формула Грина.*

Доказательство. Пусть $\overline{\Omega} = \sum_{1}^{N} \omega_k$ есть разбиение $\overline{\Omega}$ на части типа ω и пусть Γ_k обозначает положительно ориентированный контур ω_k. Тогда, в силу того, что для областей ω_k формула Грина верна, получим

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{k=1}^{N} \iint_{\omega_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{\Gamma} (P\,dx + Q\,dy).$$

Поясним последнее равенство. Общая граница C всех ω_k состоит из Γ и суммы конечного числа отрезков, каждый из которых принадлежит Ω и служит границей двух соседних областей типа ω. При этом отрезок обходится два раза в противоположных направлениях, и поэтому криволинейные интегралы, соответствующие этим обходам, компенсируют друг друга. Остается только интеграл по Γ.

На рисунке 13.7 изображена область (двухсвязная), разбитая на конечное число областей типа ω.

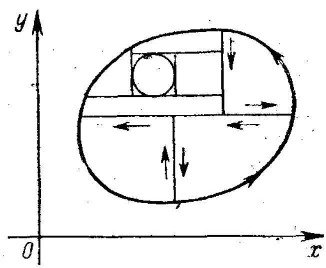

Рис. 13.7.

Замечание. На практике часто приходится иметь дело с формулой Грина в том случае, когда функции P и Q непрерывны на $\overline{\Omega}$, а их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны только на Ω, и тогда обычно формула Грина (1) верна, только кратный интеграл в ее левой части надо понимать в несобственном смысле. Пусть в качестве примера Ω есть круг $x^2 + y^2 = 1$. Обозначим через Ω_ε концентрический с ним круг $x^2 + y^2 = (1 - \varepsilon)^2$ $(\varepsilon > 0)$ с границей Γ_ε (окружностью радиуса $1 - \varepsilon$). Тогда в силу уже доказанного

$$\iint_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon} P\left(x, \sqrt{(1-\varepsilon)^2 - x^2}\right) dx +$$

$$+ \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} P\left(x, -\sqrt{(1-\varepsilon)^2 - x^2}\right) dx + \int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon} Q\left(\sqrt{(1-\varepsilon)^2 - y^2}, y\right) dy +$$

$$+ \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} Q\left(-\sqrt{(1-\varepsilon)^2 - y^2}, y^2\right) dy \quad (\varepsilon > 0). \qquad (2)$$

Так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ равномерно непрерывны на Ω, то правая часть (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к пределу, равному результату подстановки в нее $\varepsilon = 0$, но тогда и левая часть стремится к пределу к несобственному кратному интегралу (с особенностями на Г, см. § 13.13, замечание 1):

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\Gamma}(P\,dx+Q\,dy).$$

Пусть Ω есть плоская область, к которой применима формула Грина и Γ — положительно ориентированная ее граница. Тогда площадь Ω равна

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma}(x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}(1+1)\,dx\,dy=|\Omega|, \tag{3}$$

что следует из формулы Грина, если положить в ней $P=-y$, $Q=x$.

Из формулы (3), очевидно, следует равенство

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{\pm}}(x\,dy-y\,dx)=\pm|\Omega|, \tag{4}$$

где плюс соответствует случаю, когда контур Γ ориентирован положительно ($\Gamma=\Gamma_+$), а минус — когда контур Γ ориентирован отрицательно ($\Gamma=\Gamma_-$).

Пример. Площадь эллипса, точнее, площадь внутренности эллипса, заданного параметрически уравнениями $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $0\leqslant\theta<2\pi$, равна

$$|\Omega|=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos\theta\,b\cos\theta-b\sin\theta(-a\sin\theta)]\,d\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi ab.$$

§ 13.6. Интеграл по поверхности первого рода

Пусть гладкая поверхность S определяется уравнениями

$$\mathbf{r}(u,v)=\varphi\mathbf{i}+\psi\mathbf{j}+\chi\mathbf{k}\qquad((u,v)\in\Omega\rightleftarrows S,\ |\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|>0), \tag{1}$$

где Ω — измеримая область и φ,ψ,χ — непрерывно дифференцируемые на $\overline{\Omega}$ функции.

Пусть, далее, на $\overline{S}$ или в окрестности $\overline{S}$ задана непрерывная функция $F(x,y,z)$.

Интегралом первого рода функции F по поверхности S называется выражение

$$\int_S F(x,y,z)\,ds=\int_{\Omega}F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\,|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv. \tag{2}$$

Слева в (2) стоит обозначение интеграла первого рода от функции F по S, а справа — его определение. Чтобы вычислить этот интеграл, надо в выражение слева подставить вместо x, y, z соответственно функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ и считать, что