кратному интегралу (с особенностями на Г, см. § 13.13, замечание 1):

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\Gamma}(P\,dx+Q\,dy).$$

Пусть Ω есть плоская область, к которой применима формула Грина и Γ — положительно ориентированная ее граница. Тогда площадь Ω равна

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma}(x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}(1+1)\,dx\,dy=|\Omega|, \tag{3}$$

что следует из формулы Грина, если положить в ней $P=-y$, $Q=x$.

Из формулы (3), очевидно, следует равенство

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{\pm}}(x\,dy-y\,dx)=\pm|\Omega|, \tag{4}$$

где плюс соответствует случаю, когда контур Γ ориентирован положительно ($\Gamma=\Gamma_+$), а минус — когда контур Γ ориентирован отрицательно ($\Gamma=\Gamma_-$).

Пример. Площадь эллипса, точнее, площадь внутренности эллипса, заданного параметрически уравнениями $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $0\leqslant\theta<2\pi$, равна

$$|\Omega|=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos\theta\, b\cos\theta-b\sin\theta\,(-a\sin\theta)]\,d\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi ab.$$

§ 13.6. Интеграл по поверхности первого рода

Пусть гладкая поверхность S определяется уравнениями

$$\mathbf{r}(u,v)=\varphi\mathbf{i}+\psi\mathbf{j}+\chi\mathbf{k}\qquad((u,v)\in\Omega\rightleftarrows S,\ |\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|>0), \tag{1}$$

где Ω — измеримая область и φ,ψ,χ — непрерывно дифференцируемые на $\overline{\Omega}$ функции.

Пусть, далее, на $\overline{S}$ или в окрестности $\overline{S}$ задана непрерывная функция $F(x,y,z)$.

Интегралом первого рода функции F по поверхности S называется выражение

$$\int_S F(x,y,z)\,ds=\int_{\Omega}F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\,|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv. \tag{2}$$

Слева в (2) стоит обозначение интеграла первого рода от функции F по S, а справа — его определение. Чтобы вычислить этот интеграл, надо в выражение слева подставить вместо x, y, z соответственно функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ и считать, что

$ds = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv$ — дифференциальный элемент поверхности S (см. § 12.23).

Очевидно, если бы S представляла собой материальную поверхность с плотностью распределения массы, равной

$$\rho = F(x, y, z) = F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)),$$

то при помощи интеграла (1) вычислялась бы масса поверхности S.

Если поверхность S задана при помощи другой пары параметров $(u', v') \in \omega'$:

$$\mathbf{r} = \varphi_1(u', v')\mathbf{i} + \psi_1(u', v')\mathbf{j} + \chi_1(u', v')\mathbf{k},$$

где

$$u = \lambda(u', v'), \quad v = \mu(u', v'), \quad (u', v') \in \Omega'$$

— непрерывно дифференцируемые функции, устанавливающие взаимно однозначное соответствие

$$(u, v) \rightleftarrows (u', v')$$

с якобианом

$$\frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0, \qquad (u, v) \in \omega,$$

то формула (1) остается инвариантной.

В самом деле, замена переменных (u, v) на (u', v') в интеграле (1) приводит к выражению

$$\int_S F\,ds = \int_{\Omega'} F(\varphi_1(u', v'), \psi_1(u', v'), \chi_1(u', v'))\,|\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|\,du'dv',$$

потому что

$$|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| \left|\frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\,\frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,\frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2} = |\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|.$$

Если гладкая поверхность S определяется уравнением $z = f(x, y)$ $((x, y) \in G)$, где f непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка на $\overline{G}$, то можно считать, что она задана параметрически через параметры x, y:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = f(x, y). \tag{3}$$

Тогда

$$|\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y| = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \left(p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_S F(x, y, z)\,ds = \int\limits_G F(x, y, f(x, y))\,\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \qquad (4)$$

Замечание. Если поверхность — гладкая, т. е. описывается параметрически уравнениями (1) с указанными там свойствами функций φ, ψ, χ и в то же время описывается уравнением вида (3), то часто функция $z = f(x, y)$ непрерывна на $\overline{G}$, но ее частные производные непрерывны только на G и неограничены при подходе к границе G. Например, такое явление имеет место при вычислении интеграла от F по верхнему полушарию. В этом случае формула (4) для интеграла от F по S остается верной, но интеграл в правой ее части надо понимать в несобственном смысле (см. § 13.13, замечание).

Интеграл по поверхности S (первого рода) функции F можно определить еще и следующим образом.

Разобьем Ω на измеримые части, пересекающиеся попарно разве что по своим границам. Каждой части Ω_j соответствует определенный кусок S_j поверхности S. Пусть $A_j = (x_j, y_j, z_j)$ — произвольная точка на S_j. Составляем сумму

$$\text{П}_N = \sum_{j=1}^{N} F(A_j)\,|S_j|,$$

где $|S_j|$ — площадь S_j (см. § 12.23). Предел ее равен интегралу от F по S:

$$\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} F(A_j)\,|S_j| = \int\limits_S F(x, y, z)\,dS. \qquad (5)$$

В самом деле, пусть $A_j = (x_j, y_j, z_j)$ и $x_i = \varphi(u_j, v_j)$, $\varphi_j = \psi(u_j, v_j)$, $z_j = \chi(u_j, v_j)$,

$$j = 1, \ldots, N, \quad (u_j, v_j) \in \Omega_j.$$

Тогда

$$\text{П}_N = \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \int\limits_{\Omega_j} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv = \sum_{j=1}^{N} F(A_j)\,\mu_j\,|\Omega_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} F(A_j)\,|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|_j\,|\Omega_j| +$$

$$+ \varepsilon_N \xrightarrow[\max d(\Omega_j)\to 0]{} \iint\limits_{\Omega} F(\varphi, \psi, \chi)\,|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv,$$

где знак $|\ \ |_j$ обозначает, что в $|\ \ |$ подставлена точка A_j, а μ_j есть возникающее при применении теоремы о среднем число

($m_j \leqslant \mu_j \leqslant M_j$ — см. ниже). Ведь очевидно, что ($K > |F(A)|$)

$$|\varepsilon_N| = \left| \sum_{j=1}^{N} F(A_j)\left(\mu_j - |\dot{\mathbf{r}}_u \times \mathbf{r}_v|_j\right)|\Omega_j| \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{j=1}^{N} (M_j - m_j)|\Omega_j| \to 0, \quad \max d(\Omega_j) \to 0,$$

$$M_j = \sup_{(u,v)\in\Omega_j} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|, \quad m_j = \inf_{(u,v)\in\Omega_j} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|.$$

§ 13.7. Ориентация поверхностей

В трехмерном пространстве имеются две существенно различные прямоугольные системы координат, изображенные на рис. 13.8 и 13.9. Отличие их друг от друга заключается в том, что невозможно осуществить такое движение одной из систем, чтобы в результате его оказались совмещенными точки 0 и одноименные положительные полуоси x, y, z обеих систем.

Первую *систему* (рис. 13.8) называют *правой*, вторую (рис. 13.9) — *левой*. Если смотреть снизу вверх вдоль положительной оси z, то для совмещения положительной оси x с положительной осью y в кратчайшем направлении в случае рис. 13.8 нужно вращать ось x в плоскости x, y слева направо, а в случае рис. 13.9 — справа налево (против часовой стрелки).

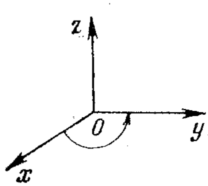

Рис. 13.8.

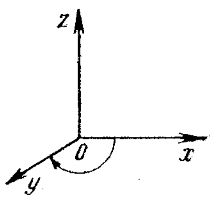

Рис. 13.9.

С каждой из рассматриваемых двух систем естественно связать «штопор» — комбинацию, состоящую из единичного, направленного в положительном направлении оси z вектора и перпендикулярного к оси z кружка (головки штопора), на границе которого (окружности) задано направление обхода от оси x к оси y в кратчайшем направлении.

Если в случае рис. 13.8 считать, что ось z есть ось винта (штопора), скрепленного с головкой и имеющего «правую нарезку», то вращая головку в направлении стрелки, мы заставим штопор двигаться в направлении положительной оси z. Того же эффекта мы достигнем в случае рис. 13.9, если ось z будет осью винта, имеющего левую нарезку.