($m_j \leqslant \mu_j \leqslant M_j$ — см. ниже). Ведь очевидно, что $(K > |F(A)|)$

$$|\varepsilon_N| = \left|\sum_{j=1}^{N} F(A_j)\left(\mu_j - |\dot{\mathbf{r}}_u \times \mathbf{r}_v|_j\right)|\Omega_j|\right| \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{j=1}^{N} (M_j - m_j)|\Omega_j| \to 0, \quad \max d(\Omega_j) \to 0,$$

$$M_j = \sup_{(u,v)\in\Omega_j} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|, \quad m_j = \inf_{(u,v)\in\Omega_j} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|.$$

§ 13.7. Ориентация поверхностей

В трехмерном пространстве имеются две существенно различные прямоугольные системы координат, изображенные на рис. 13.8 и 13.9. Отличие их друг от друга заключается в том, что невозможно осуществить такое движение одной из систем, чтобы в результате его оказались совмещенными точки 0 и одноименные положительные полуоси x, y, z обеих систем.

Первую *систему* (рис. 13.8) называют *правой*, вторую (рис. 13.9) — *левой*. Если смотреть снизу вверх вдоль положительной оси z, то для совмещения положительной оси x с положительной осью y в кратчайшем направлении в случае рис. 13.8 нужно вращать ось x в плоскости x, y слева направо, а в случае рис. 13.9 — справа налево (против часовой стрелки).

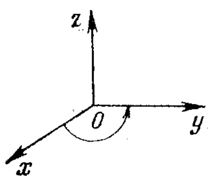

Рис. 13.8.

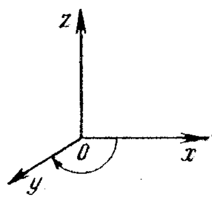

Рис. 13.9.

С каждой из рассматриваемых двух систем естественно связать «штопор» — комбинацию, состоящую из единичного, направленного в положительном направлении оси z вектора и перпендикулярного к оси z кружка (головки штопора), на границе которого (окружности) задано направление обхода от оси x к оси y в кратчайшем направлении.

Если в случае рис. 13.8 считать, что ось z есть ось винта (штопора), скрепленного с головкой и имеющего «правую нарезку», то вращая головку в направлении стрелки, мы заставим штопор двигаться в направлении положительной оси z. Того же эффекта мы достигнем в случае рис. 13.9, если ось z будет осью винта, имеющего левую нарезку.

Головка может быть искривлена, т. е. может представлять собой кусок гладкой поверхности, не обязательно плоской, но такой, что ось z есть нормаль к этому куску в точке 0. И в этом случае комбинация из такой головки, на которой задано направление обхода, и единичной нормали образует штопор — правый или левый.

Наконец, можно представить себе такой штопор (правый или левый) с нормальным вектором, идущим в произвольном направлении, не обязательно совпадающим с осью z. Для дальнейшего будет важно представить себе следующую конструкцию. Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная система координат (правая или левая) и ориентированная поверхность S. Таким образом, из каждой точки $P \in S$ выпущена единичная нормаль $\mathbf{n}(P)$, непрерывно зависящая от P. Шар $V(P)$ достаточно малого радиуса с центром в точке P высекает из поверхности S некоторый связный кусок $\sigma(P)$, содержащий точку P. На контуре (на краю) $\gamma(P)$ этого куска определим направление обхода так, чтобы вектор $\mathbf{n}(P)$ и кусок $\sigma(P)$ образовали штопор, ориентированный так же, как данная система координат, т. е. если сисема координат — правая (левая), то и штопор должен быть правым (левым).

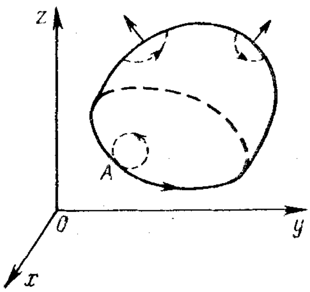

Рис. 13.10.

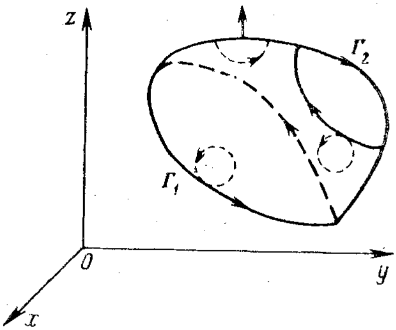

Рис. 13.11.

Если поверхность S имеет край Γ, то созданная конструкция естественным образом приводит к определенному направлению обхода на Γ (рис. 13.10). Обратим, например, внимание на точку A контура Γ. В ней направления обхода по Γ и по замкнутому искривленному принадлежащему S кружочку γ совпадают.

Если бы данная поверхность была ориентирована противоположным образом, а система координат осталась прежней, то определенные выше направления обхода нужно было бы заменить на противоположные.

На рис. 13.11 нарисована ориентированная поверхность с краем, состоящим из двух замкнутых гладких кривых Γ_1 и Γ_2.

Отметим еще следующий факт. Пусть ориентированная гладкая поверхность S разрезана на две ориентированные так же поверхности S_1, S_2 гладкой дугой h (рис. 13.12). Тогда направления обхода контуров S_1 и S_2 вдоль дуги h противоположны.

Это замечание будет руководящим для того, чтобы правильно определить понятие ориентированной кусочно гладкой поверхности.

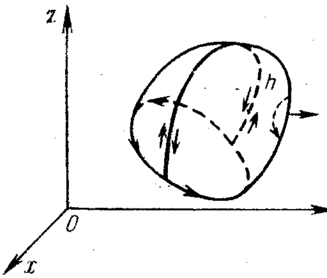

Рис. 13.12.

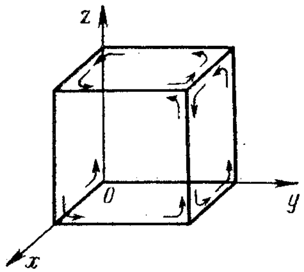

Рис. 13.13.

Кусочно гладкая поверхность S называется ориентированной, если каждый из ее гладких кусков ориентирован и возникающие при этом направления обхода контуров этих кусков согласованы в том смысле, что вдоль каждой дуги, где два таких контура совпадают, направления их обхода противоположны.

На рис. 13.13 нарисован куб, поверхность которого ориентирована при помощи ее внешней нормали.

Малые куски ориентированной поверхности (элементы поверхности) удобно считать векторами.

Пусть S есть ориентированная гладкая поверхность, таким образом, из каждой точки $A \in S$ выпущена единичная нормаль $\mathbf{n}(A)$ к S в A, непрерывно зависящая от A. Пусть σ есть гладкий кусок S. Будем считать, что $\boldsymbol{\sigma}$ есть вектор, скалярная величина которого равна площади $|\sigma|$ куска σ, а направление определяется вектором $\mathbf{n}(A)$, где A есть какая-либо точка σ. Таким образом, $\boldsymbol{\sigma} = |\sigma|\mathbf{n}(A)$.

Этим, конечно, вектор $\boldsymbol{\sigma}$ однозначно не определен. Однако, если диаметр $d(\boldsymbol{\sigma})$ мал, то направление $\mathbf{n}(A)$ не выходит за пределы некоторого малого конуса, и если σ есть переменный кусок, постоянно содержащий фиксированную точку A_0, то, очевидно, $\mathbf{n}(A) \to \mathbf{n}(A_0)$ $(d(\sigma) \to 0)$, где $d(\sigma)$ есть диаметр σ, независимо от того, как выбиралась точка $A \in \sigma$ для каждого σ.

Дифференциальный элемент ориентированной поверхности S в точке $A \in S$ естественно считать вектором $d\mathbf{S} = \mathbf{n}(A)dS$, который, таким образом, равен произведению дифференциального элемента площади S в точке A на вектор единичной нормали $\mathbf{n}(A)$, определяющей ориентацию S.

Если S задана уравнением

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)=\varphi\mathbf{i}+\psi\mathbf{j}+\chi\mathbf{k} \qquad ((u, v)\in\bar{G}),$$

то $\mathbf{n}(A)$ определяется одним из двух равенств

$$\mathbf{n}(A)=\pm\frac{\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|} \tag{1}$$

и $dS=|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|du\,dv$. Отсюда

$$d\mathbf{S}=\pm(\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v)du\,dv. \tag{2}$$

В дальнейшем мы будем считать, что в (1), (2) выбран знак «+». Этого всегда можно достигнуть, поменяв в случае необходимости местами параметры u и v. Мы этим хотим сказать, что *если задана определенная ориентированная гладкая поверхность S, то всегда можно считать, что она описывается такой вектор-функцией $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$, что единичная нормаль $\mathbf{n}(A)$ $(A\in S)$, определяющая ориентацию S, выражается равенством*

$$\mathbf{n}(A)=\frac{\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|} \tag{3}$$

и соответственно

$$d\mathbf{S}=(\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v)du\,dv. \tag{4}$$

Если мы хотим, чтобы в этих выражениях при преобразовании параметров (u, v) в параметры (u', v') не появился знак минус, то нужно, чтобы якобиан преобразования $\frac{D(u, v)}{D(u', v')}$ был положительным. Действительно,

$$\mathbf{n}(A)=\frac{\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v|}=\frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\mathbf{i}+\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\mathbf{j}+\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2+\left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2+\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\mathbf{i}+\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\mathbf{j}+\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\mathbf{k}\right)}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2+\left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2+\left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2}}\cdot\frac{\frac{D(u', v')}{D(u, v)}}{\left|\frac{D(u', v')}{D(u, v)}\right|}=$$

$$=\frac{\dot{\mathbf{r}}_{u'}\times\dot{\mathbf{r}}_{v'}}{|\dot{\mathbf{r}}_{u'}\times\dot{\mathbf{r}}_{v'}|}\cdot\operatorname{sign}\frac{D(u', v')}{D(u, v)}.$$

Таким образом, формула (3) (со знаком «+»!) для единичной нормали $\mathbf{n}(A)$ (а вместе с ней и формула (4)) *инвариантна только по отношению к преобразованиям параметров, имеющим положительный якобиан.* Поэтому следует рекомендовать преобразования с положительным якобианом.

Однако иногда мы вынуждены рассматривать преобразования с отрицательным якобианом. Тогда надо следить за правильностью знаков.

Формальные основы ориентации поверхностей (многообразий) и их краев даны в §§ 17.1 и 17.2.

§ 13.8. Интеграл по ориентированной плоской области

Пусть в плоскости, где задана прямоугольная система координат x, y, определена область G с кусочно гладкой границей Γ и на Γ задано направление обхода. Ориентированную таким образом *область G обозначим через G_+ или G_- в зависимости от того, ориентирован ли контур Γ положительно или отрицательно.*

Пусть теперь на G задана интегрируемая функция $f(x, y)$. Введем понятие *интеграла от f по ориентированной области.* Именно, положим

$$\int_{G_+} f\,dx\,dy = \int_G f\,dx\,dy = -\int_{G_-} f\,dx\,dy.$$

Полезность этих определений можно видеть из следующего факта. Зададим две плоскости, где заданы прямоугольные системы координат x, y и x', y', одинаково ориентированные. Пусть G обозначает ориентированную область плоскости x, y с кусочно гладкой (ориентированной) границей Γ и пусть непрерывно дифференцируемое преобразование

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y) \quad ((x, y) \in \overline{G}) \tag{1}$$

отображает взаимно однозначно область G на область G' плоскости x', y' и Γ на границу Γ' области G'. Будем предполагать, что якобиан

$$D = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \neq 0 \quad (\text{на } G).$$

При этом преобразовании обход Γ индуцирует на Γ' вполне определенный обход и G' можно считать ориентированной областью.

Если $D > 0$, то при переходе от Γ к Γ' ориентация Γ не меняется. Если же $D < 0$, то обходы Γ и Γ' противоположны.

Докажем это утверждение в предположении, что ψ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть ориентированный контур Γ определяется кусочно гладкими непрерывными функциями $x = \lambda(s)$, $y = \mu(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$, тогда соответствующий (тоже ориентированный) контур Γ' определяется функциями $x' = \varphi(\lambda(s), \mu(s))$, $y' = \psi(\lambda(s), \mu(s))$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$.