Таким образом, формула (3) (со знаком «+»!) для единичной нормали $\mathbf{n}(A)$ (а вместе с ней и формула (4)) *инвариантна только по отношению к преобразованиям параметров, имеющим положительный якобиан.* Поэтому следует рекомендовать преобразования с положительным якобианом.

Однако иногда мы вынуждены рассматривать преобразования с отрицательным якобианом. Тогда надо следить за правильностью знаков.

Формальные основы ориентации поверхностей (многообразий) и их краев даны в §§ 17.1 и 17.2.

§ 13.8. Интеграл по ориентированной плоской области

Пусть в плоскости, где задана прямоугольная система координат x, y, определена область G с кусочно гладкой границей Γ и на Γ задано направление обхода. Ориентированную таким образом *область G обозначим через G_+ или G_- в зависимости от того, ориентирован ли контур Γ положительно или отрицательно.*

Пусть теперь на G задана интегрируемая функция $f(x, y)$. Введем понятие *интеграла от f по ориентированной области.* Именно, положим

$$\int_{G_+} f\,dx\,dy = \int_{G} f\,dx\,dy = -\int_{G_-} f\,dx\,dy.$$

Полезность этих определений можно видеть из следующего факта. Зададим две плоскости, где заданы прямоугольные системы координат x, y и x', y', одинаково ориентированные. Пусть G обозначает ориентированную область плоскости x, y с кусочно гладкой (ориентированной) границей Γ и пусть непрерывно дифференцируемое преобразование

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y) \quad ((x, y) \in \overline{G}) \tag{1}$$

отображает взаимно однозначно область G на область G' плоскости x', y' и Γ на границу Γ' области G'. Будем предполагать, что якобиан

$$D = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \neq 0 \quad (\text{на } G).$$

При этом преобразовании обход Γ индуцирует на Γ' вполне определенный обход и G' можно считать ориентированной областью.

Если $D > 0$, то при переходе от Γ к Γ' ориентация Γ не меняется. Если же $D < 0$, то обходы Γ и Γ' противоположны.

Докажем это утверждение в предположении, что ψ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть ориентированный контур Γ определяется кусочно гладкими непрерывными функциями $x = \lambda(s)$, $y = \mu(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$, тогда соответствующий (тоже ориентированный) контур Γ' определяется функциями $x' = \varphi(\lambda(s), \mu(s))$, $y' = \psi(\lambda(s), \mu(s))$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$.

Будем для определенности считать, что контур Γ' ориентирован положительно, тогда (пояснения ниже)

$$0 < |G'| = \int\limits_{\Gamma'} x'\,dy' =$$

$$= \int\limits_0^{s_0} \varphi(\lambda(s), \mu(s)) \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}(\lambda(s), \mu(s))\,\lambda'(s) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(\lambda(s), \mu(s))\,\mu'(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \varphi(x, y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy\right) = \pm \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx\,dy =$$

$$= \pm \iint\limits_{G} D\,dx\,dy.$$

В предпоследнем равенстве применена формула Грина, в силу которой перед кратным интегралом надо поставить $+$, если окажется, что Γ ориентировано положительно, или $-$, если Γ ориентировано отрицательно. Но это выражение в целом положительно, что может быть, лишь если $D > 0$ и Γ ориентировано положительно или $D < 0$ и Γ ориентировано отрицательно. Надо учесть, что $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x}$.

Из сказанного следует, что для любой функции $f(x, y)$, непрерывной на замыкании $\overline{G}$ ориентированной измеримой области G,

$$\iint\limits_{G} f\,dx\,dy = \iint\limits_{G'} f\,\frac{D(x, y)}{D(x', y')}\,dx'\,dy',$$

где G' обозначает соответствующую G ориентированную область. В этой формуле замены переменных якобиан не пишется под знаком абсолютной величины.

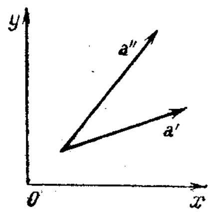

Рис. 13.14.

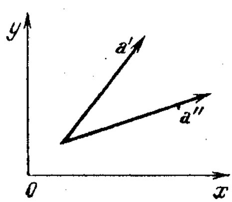

Рис. 13.15.

Остановимся еще на связи ориентации Γ со знаком D. В прямоугольной системе координат x, y зададим два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}' = (a_1', a_2')$ и $\mathbf{a}'' = (a_1'', a_2'')$. Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1' & a_1'' \\ a_2' & a_2'' \end{vmatrix}$$

положителен (см. § 12.14), то это указывает на тот факт, что система $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$ ориентирована так же, как оси x, y (рис. 13.14). Если же $\Delta < 0$, то система $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$ ориентирована противоположно (рис. 13.15).

Преобразование (1) отображает прямоугольную сетку плоскости x, y в криволинейную (рис. 13.16—13.18). При этом могут иметь место два характерных случая отображений, изображенных на рис. 13.17 и на рис. 13.18.

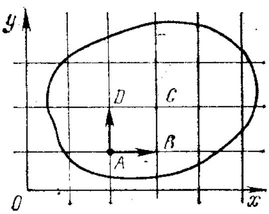

Рис. 13.16.

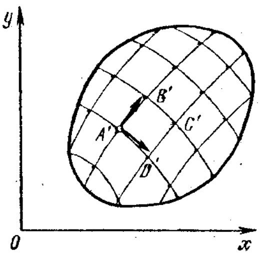

Рис. 13.17.

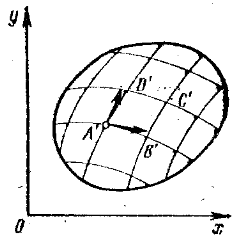

Рис. 13.18.

Квадрат $ABCD$ переходит в криволинейный параллелограмм $A'B'C'D'$, вектор $\overrightarrow{AB}$ переходит с точностью до бесконечно малых высшего порядка в касательную к дуге $\overset{\frown}{A'B'}$ в точке A', определяемую вектором $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}\right)$, а вектор $\overrightarrow{AD}$ — в касательную к дуге $\overset{\frown}{A'D'}$ в точке A', определяемую вектором $\left(\frac{\partial x'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial y}\right)$. Если определитель $D' = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} > 0$, то расположение этих векторов будет таким, как на рис. 13.17, а это приводит к тому, что направления обхода у $ABCD$ и $A'B'C'D'$ совпадают, а следовательно, и обхода Γ и Γ'.

Если же $D' < 0$, то расположение касательных векторов к $\overset{\frown}{A'B'}$ и $\overset{\frown}{A'D'}$ друг к другу меняется на противоположное, что влечет за собой (рис. 13.18) тот факт, что обходы у Γ и Γ' делаются противоположными.

Аналогично определяются интегралы для областей G_+ и G_-, определенных на других координатных плоскостях yz, zx.

§ 13.9. Поток вектора через ориентированную поверхность

В трехмерном пространстве R, с прямоугольной системой координат x, y, z, дана область H и на ней определено поле непрерывного вектора

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$