положителен (см. § 12.14), то это указывает на тот факт, что система $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$ ориентирована так же, как оси x, y (рис. 13.14). Если же $\Delta < 0$, то система $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$ ориентирована противоположно (рис. 13.15).

Преобразование (1) отображает прямоугольную сетку плоскости x, y в криволинейную (рис. 13.16—13.18). При этом могут иметь место два характерных случая отображений, изображенных на рис. 13.17 и на рис. 13.18.

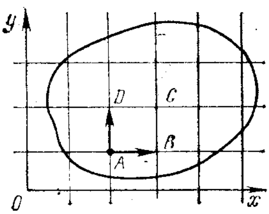

Рис. 13.16.

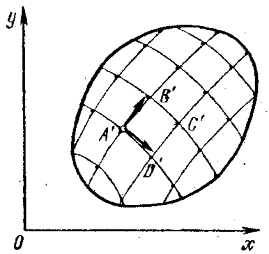

Рис. 13.17.

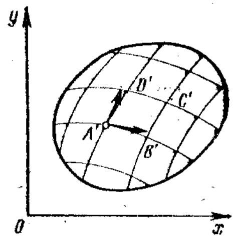

Рис. 13.18.

Квадрат $ABCD$ переходит в криволинейный параллелограмм $A'B'C'D'$, вектор $\overrightarrow{AB}$ переходит с точностью до бесконечно малых высшего порядка в касательную к дуге $\smile{A'B'}$ в точке A', определяемую вектором $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}\right)$, а вектор $\overrightarrow{AD}$ — в касательную к дуге $\smile{A'D'}$ в точке A', определяемую вектором $\left(\frac{\partial x'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial y}\right)$.

Если определитель $D' = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} > 0$, то расположение этих векторов будет таким, как на рис. 13.17, а это приводит к тому, что направления обхода у $ABCD$ и $A'B'C'D'$ совпадают, а следовательно, и обхода Γ и Γ'.

Если же $D' < 0$, то расположение касательных векторов к $\smile{A'B'}$ и $\smile{A'D'}$ друг к другу меняется на противоположное, что влечет за собой (рис. 13.18) тот факт, что обходы у Γ и Γ' делаются противоположными.

Аналогично определяются интегралы для областей G_+ и G_-, определенных на других координатных плоскостях yz, zx.

§ 13.9. Поток вектора через ориентированную поверхность

В трехмерном пространстве R, с прямоугольной системой координат x, y, z, дана область H и на ней определено поле непрерывного вектора

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

В H задана ориентированная гладкая поверхность S^*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k} \quad ((u, v) \in \Omega,\ |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| > 0), \tag{1}$$

где Ω — измеримая область в плоскости параметров (u, v) и φ, ψ, χ — непрерывно дифференцируемые на $\overline{\Omega}$ функции.

Будем считать, что единичная нормаль к S^* определяется векторным равенством (см. сказанное в связи с § 13.7, (1), (3))

$$\mathbf{n}(A) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|}.$$

Тогда косинусы углов $\mathbf{n} = \mathbf{n}(A)$ с осями x, y, z выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \varkappa \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, & \cos(n, y) &= \varkappa \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \\ \cos(n, z) &= \varkappa \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, & \varkappa &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|}. \end{aligned} \tag{2}$$

Будем еще обозначать через S ту же поверхность, но не ориентированную — с нее снята ориентация.

Потоком вектора $\mathbf{a}$ *через ориентированную поверхность* S^* называется интеграл (первого рода) по S

$$\int_S (\mathbf{a}\, d\mathbf{S}^*) = \int_S (\mathbf{an})\, dS \tag{3}$$

от скалярного произведения

$$(\mathbf{an}) = P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z),$$

вектора $\mathbf{a}$ поля и единичной нормали $\mathbf{n}$, определяющей ориентацию S^*.

Так как $(\mathbf{an})$ есть непрерывная функция от точки $A \in S$, то интеграл (3) первого рода по S имеет смысл (см. § 13.6).

Например, пусть в поле H имеет место стационарное течение жидкости, так что скорость ее $\mathbf{a}$ в какой-либо точке $A \in H$ зависит от A, но не зависит от времени. Поток ее скорости через ориентированную поверхность S^* есть количество ее, проходящее в единицу времени через S в том же направлении, в котором ориентирована S.

Справедливо равенство

$$\int_S (\mathbf{an})\, dS = \int_S (P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z))\, ds =$$

$$= \iint_G \left(P\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right) du\, dv, \tag{4}$$

где в правой части стоит обычный кратный интеграл по G, в котором в P, Q и R надо поставить вместо x, y, z соответственно функции φ, ψ, χ от u, v. Это равенство следует из (2) и формулы § 13.6, (3).

Часто удобно вычислить интеграл (4) в декартовых координатах. Покажем, к каким вычислениям это приводит в предположении, что гладкий кусок $\bar{S}$ поверхности взаимно однозначно проектируется на измеримые части всех трех плоскостей координат. Многие гладкие поверхности можно разбить на конечное число таких кусков.

Итак, пусть гладкий кусок $\bar{S}$ описывается любой из трех функций

$$x = f_1(y, z) \quad ((y, z) \in \bar{S}_x), \tag{4'}$$

$$y = f_2(z, x) \quad ((z, x) \in \bar{S}_y), \tag{4''}$$

$$z = f_3(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{S}_z), \tag{4'''}$$

непрерывных соответственно на проекциях $\bar{S}$ на плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и имеющих непрерывные частные производные, вообще говоря, только на открытых измеримых ядрах S_x, S_y, S_z этих проекций (т. е. на проекциях без их границ).

Обозначим еще через S_x^*, S_y^*, S_z^* соответствующие ориентированные проекции ориентированной поверхности S^* на плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Обход контура S^* определяет при проектировании соответствующий обход площадок S_x, S_y, S_z (см. рис. 13.19). Нормаль $\mathbf{n}$ к S образует угол с осью z, косинус которого равен

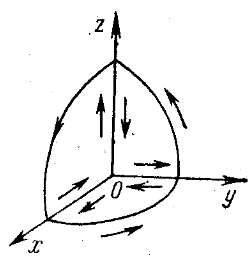

Рис. 13.19.

$$\cos(n, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \left(p = \frac{\partial f_3}{\partial x},\ q = \frac{\partial f_3}{\partial y}\right),$$

где надо взять «+» или «−» в зависимости от ориентации S^*. Имеем (см. § 13.6, (5))

$$\int\limits_S R\cos(n, z)\, dS = \int\limits_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) \frac{(\pm 1)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \times$$

$$\times \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \pm \int\limits_{S_z} R(x, y, f_3(x, y))\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_{S_z^*} R(x, y, f_3(x, y))\, dx\, dy = \int\limits_{S^*} R(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{5}$$

где предпоследний интеграл взят по ориентированной площадке S_z^* (см. § 13.8). Что касается последнего интеграла в этой цепи, то его надо рассматривать как обозначение предпоследнего. Это так называемый интеграл второго рода. Чтобы его вычислить, надо подставить $f_3(x, y)$ вместо z и проинтегрировать по ориентированной проекции S_z^*. Из § 13.8 мы знаем, что $\int\limits_{S_z^*} = \pm \int\limits_{S_z}$ где надо взять «+» или «−» в зависимости от того, будет ли площадка S_z^* ориентирована положительно или отрицательно. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в отношении остальных двух интегралов (рис. 13.19):

$$\int\limits_S R\cos(n, x)\,dS = \int\limits_{S_x^*} P(f_1(y, z), y, z)\,dy\,dz = \int\limits_{S^*} P(x, y, z)\,dy\,dz,$$

$$\int\limits_S Q\cos(n, y)\,dS = \int\limits_{S_y^*} Q(x, f_2(z, x), z)\,dz\,dx = \int\limits_{S^*} Q(x, y, z)\,dz\,dx.$$

Мы доказали, что поток вектора **a** через ориентированную поверхность S^*, определяемую нормалью **n**, может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_S (\mathbf{an})\,dS = \int\limits_{S^*} (P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy). \tag{5}$$

Если поверхность S^* может быть разрезана на конечное число частей, $S^* = \sum S_k^*$, каждая из которых проектируется на все три координатные плоскости, то чтобы вычислить поток **a** через S^*, можно вычислить потоки **a** через каждый из кусков S_k^* указанным способом и сложить их.

Шаровая поверхность с центром в нулевой точке естественно разрезывается плоскостями координат на 8 кусков, обладающих указанным свойством. Тор, рассмотренный в примере 3 § 7.20, разрезывается на шестнадцать таких кусков плоскостями координат и еще цилиндрической круговой поверхностью радиуса b с осью, идущей по оси y.

§ 13.10. Дивергенция. Теорема Гаусса — Остроградского *)

Пусть E есть пространство, где задана прямоугольная система координат x, y, z, $G \subset R$ — область с кусочно гладкой границей S и на G определено поле вектора

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \quad ((x, y, z) \in \overline{G}). \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на $\overline{G}$, откуда следует, что для вектора **a** имеет смысл непрерыв-

*) К. Ф. Гаусс (1777—1855) — выдающийся немецкий математик. Остроградский — см. § 8.7.