то его надо рассматривать как обозначение предпоследнего. Это так называемый интеграл второго рода. Чтобы его вычислить, надо подставить $f_3(x, y)$ вместо z и проинтегрировать по ориентированной проекции S_z^*. Из § 13.8 мы знаем, что $\int\limits_{S_z^*} = \pm \int\limits_{S_z}$ где надо взять «+» или «−» в зависимости от того, будет ли площадка S_z^* ориентирована положительно или отрицательно. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в отношении остальных двух интегралов (рис. 13.19):

$$\int\limits_S R\cos(n, x)\,dS = \int\limits_{S_x^*} P(f_1(y, z), y, z)\,dy\,dz = \int\limits_{S^*} P(x, y, z)\,dy\,dz,$$

$$\int\limits_S Q\cos(n, y)\,dS = \int\limits_{S_y^*} Q(x, f_2(z, x), z)\,dz\,dx = \int\limits_{S^*} Q(x, y, z)\,dz\,dx.$$

Мы доказали, что поток вектора **a** через ориентированную поверхность S^*, определяемую нормалью **n**, может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_S (\mathbf{an})\,dS = \int\limits_{S^*} (P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R\,(x, y, z)\,dx\,dy). \tag{5}$$

Если поверхность S^* может быть разрезана на конечное число частей, $S^* = \sum S_k^*$, каждая из которых проектируется на все три координатные плоскости, то чтобы вычислить поток **a** через S^*, можно вычислить потоки **a** через каждый из кусков S_k^* указанным способом и сложить их.

Шаровая поверхность с центром в нулевой точке естественно разрезывается плоскостями координат на 8 кусков, обладающих указанным свойством. Тор, рассмотренный в примере 3 § 7.20, разрезывается на шестнадцать таких кусков плоскостями координат и еще цилиндрической круговой поверхностью радиуса b с осью, идущей по оси y.

§ 13.10. Дивергенция. Теорема Гаусса — Остроградского *)

Пусть E есть пространство, где задана прямоугольная система координат x, y, z, $G \subset R$ — область с кусочно гладкой границей S и на G определено поле вектора

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \quad ((x, y, z) \in \overline{G}). \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на $\overline{G}$, откуда следует, что для вектора **a** имеет смысл непрерыв-

*) К. Ф. Гаусс (1777—1855) — выдающийся немецкий математик. Остроградский — см. § 8.7.

ная функция

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \left((x, y, z) \in \overline{G}\right), \tag{2}$$

называемая *дивергенцией вектора* $\mathbf{a}$.

Будем считать, что поверхность S ориентирована при помощи единичной нормали $\mathbf{n}$, направленной во внешность G.

Целью нашей будет доказать равенство

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dG = \int_S (\mathbf{an})\, dS \tag{3}$$

при некоторых дополнительных условиях, налагаемых на G. Это равенство называют *формулой Гаусса — Остроградского* по имени математиков, ее доказавших.

Формула Гаусса — Остроградского говорит, что *объемный интеграл от дивергенции вектора по области G равен потоку вектора через границу этой области, ориентированную в направлении ее внешней нормали.*

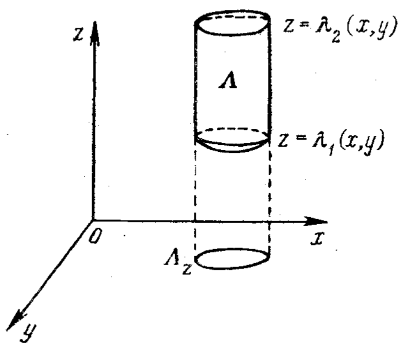

Рис. 13.20.

Начнем с того, что рассмотрим область Λ, изображенную на рис. 13.20, которую мы будем называть элементарной H_z-областью. Сверху и снизу Λ ограничена поверхностями σ_1 и σ_2 (с кусочно гладкими краями), определяемыми соответственно уравнениями

$$z = \lambda_1(x, y), \; z = \lambda_2(x, y),$$
$$\lambda_1(x, y) \leqslant \lambda_2(x, y) \quad \left((x \cdot y) \in \overline{\Lambda}_z\right),$$

где Λ_z — плоская область с (кусочно гладкой) границей γ, а λ_1, λ_2 непрерывны на $\overline{\Lambda}_z$ и имеют непрерывные частные производные на открытом множестве Λ_z. С боков Λ ограничена цилиндрической поверхностью σ^* с направляющей γ и образующей параллельной оси z.

Пусть S^* есть граница Λ, ориентированная при помощи внешней к Λ нормали. Тем самым нижний и верхний куски σ_1^*, σ_2^*, так же как боковая поверхность σ^* области Λ, соответственно ориентированы. Для области Λ имеют место равенства (пояснения ниже)

$$\int_\Lambda \frac{\partial R}{\partial z}\, d\Lambda = \int\int_{\Lambda_z} dx\, dy \int_{\lambda_1(x,y)}^{\lambda_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$$

$$= \int\int_{\Lambda_z} \{R(x, y, \lambda_2(x, y)) - R(x, y, \lambda_1(x, y))\}\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma^*_{2,z}} R\,((x, y, \lambda_2(x, y))\,dx\,dy + \iint\limits_{\sigma^*_{1,z}} R\,(x, y, \lambda_1(x, y))\,dx\,dy = $$

$$= \iint\limits_{S^*} R\,(x, y, z)\,dx\,dy. \quad (4)$$

Нормаль $\mathbf{n}$ к σ_1^*, σ_2^* образует с осью z соответственно тупой и острый углы, поэтому проекции $\sigma^*_{1,z}, \sigma^*_{2,z}$ кусков σ_1^*, σ_2^* на плоскость $z = 0$ ориентированы первая отрицательно, а вторая положительно. Это обосновывает переход от третьего члена цепи (4) к четвертому. К сумме, составляющей четвертый член, можно формально добавить интеграл

$$\iint\limits_{\sigma^*} R\,(x, y, z)\,dx\,dy = 0,$$

равный нулю, потому что $\cos(n, z) = 0$ вдоль σ^*. Но тогда полученная сумма трех интегралов равна интегралу, стоящему в качестве последнего члена цепи (4) (потоку вектора $(0, 0, R)$ через S^*).

Этим мы доказали теорему Гаусса — Остроградского для элементарной H_z-области и вектора $(0, 0, R)$.

Назовем теперь область G H_z-областью, если ее замыкание $\overline{G}$ можно разрезать на конечное число замыканий элементарных H_z-областей:

$$\overline{G} = \sum_{k=1}^{N} \overline{G}_k$$

так, что нижние и верхние куски границы G_k суть части ориентированной границы S^* области G, и докажем, что для G и вектора $(0, 0, R)$ тоже справедлива теорема Гаусса — Остроградского.

В самом деле, обозначим соответственно через $S_{1,k}$, $S_{2,k}$ нижние и верхние куски границ $\overline{G}_k$ и через S_k — боковые куски G_k. Тогда (пояснения ниже)

$$\int\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dG = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{G_k} \frac{\partial R}{\partial z}\,dG =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\int\limits_{S^*_{1,k}} R\,(x, y, z)\,dx\,dy + \int\limits_{S^*_{2,k}} R\,(x, y, z)\,dx\,dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{S^*_k} R\,(x, y, z)\,dx\,dy \right) = \int\limits_{S^*} R\,(x, y, z)\,dx\,dy,$$

потому что интегралы по S^*_k, очевидно, равны нулю, а куски $S^*_{1,k}$ и $S^*_{2,k}$ либо составляют в совокупности поверхность S^*, либо, если это не так, то множество

$$\sigma = S^* - \sum_1^N S_{1,k}^* - \sum_1^N S_{2,k}^*$$

есть часть S^*, нормаль в любой точке которой перпендикулярна оси z. Но тогда интеграл по σ равен нулю.

По аналогии можно ввести понятия H_x-области и H_y-области. Например, H_x-область обладает тем свойством, что ее замыкание можно разрезать на конечное число замыканий элементарных H_x-областей. Элементарная же H_x-область определяется так же, как элементарная H_z-область, только роль z теперь играет x. По аналогии доказывается, что для H_x-области G имеет место равенство

$$\int\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\, dG = \int\limits_{S^*}\!\!\int P(x, y, z)\, dy\, dz,$$

т. е. формула Гаусса — Остроградского для вектора $(P, 0, 0)$, а для H_y-области G — формула

$$\int\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\, dG = \int\limits_{S^*}\!\!\int Q(x, y, z)\, dz\, dx.$$

Если теперь G есть одновременно H_x, H_y и H_z-область, то для нее, очевидно, верна теорема Гаусса — Остроградского для произвольного непрерывно дифференцируемого на $\overline{G}$ вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, т. е. верно равенство

$$\int\!\!\int\limits_G\!\!\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$
$$= \int\limits_{S^*}\!\!\int (P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dz\, dx + R(x, y, z)\, dx\, dy), \qquad (5)$$

где интеграл справа есть интеграл по поверхности S^*, ориентированной внешней нормалью к G.

Если в формуле Гаусса — Остроградского положить $P = x$, $Q = y$, $R = z$, то получим выражение для объема области G:

$$|G| = \frac{1}{3} \int\limits_{S^*}\!\!\int (x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$$

через интеграл по ее ориентированной (внешней нормалью) границе S^*.

Области, с которыми приходится обычно иметь дело, являются одновременно H_x, H_y и H_z-областями.

Пример 1. Шар $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ есть H_z-область, даже элементарная H_z-область, потому что вся его внутренность ограничена двумя лежащими друг над другом гладкими на $x^2 + y^2 < 1$ поверхностями $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

$z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, непрерывными на замкнутом круге $x^2+y^2 \leqslant 1$, имеющем гладкую границу. Очевидно, шар есть также H_x и H_y-области.

Пример 2. Возьмем тор T, полученный вращением заданного в плоскости (x, y) круга $(x-b)^2+y^2=a^2$ $(0<a<b)$ вокруг оси y. Чтобы убедиться в том, что T есть H_y-область, достаточно поверхность T разделить на две части плоскостью x, z. Далее, плоскости $x=b-a$, $x=a-b$ рассекают T на четыре элементарные H_z-области, а плоскости $z=b-a$, $z=a-b$ — на четыре элементарные H_x-области.

Формула Гаусса — Остроградского преобразует объемный интеграл в интеграл по поверхности. В следующем параграфе доказывается формула Стокса, при помощи которой при определенных условиях интеграл по поверхности преобразуется в криволинейный интеграл.

Чтобы выяснить физическое значение понятия дивергенции, будем считать, что в G имеет место стационарное течение жидкости, скорость которой в произвольной точке (x, y, z) равна $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$. Зададим произвольную, но фиксированную точку $A=(x, y, z) \in G$ и окружим ее шаром $V_\varepsilon \subset G$ радиуса $\varepsilon > 0$. Пусть S_ε^* есть его граница (шаровая поверхность), ориентированная посредством внешней нормали. Тогда на основании формулы Гаусса — Остроградского

$$\iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \iiint_{V_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy\, dz.$$

Левая часть этого равенства выражает количество жидкости, вытекающее из V_ε (вовне S_ε) за единицу времени.

Применяя к правой его части теорему о среднем, получим

$$\iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = |V_\varepsilon| \operatorname{div} \mathbf{a}_1, \tag{6}$$

где $|V_\varepsilon|$ есть объем V_ε, а $\mathbf{a}_1$ — скорость жидкости в некоторой точке из V_ε. Разделив обе части полученного равенства на $|V_\varepsilon|$ и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, в силу непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{a}$, что существует предел, равный дивергенции $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|V_\varepsilon|} \iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) \tag{7}$$

в точке (x, y, z). Таким образом, $\operatorname{div} \mathbf{a}$ представляет собой производительность источников, непрерывно распределенных по G, в точке $A=(x, y, z)$. Если в точке A (или всюду на G) $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, то это значит, что в A (или всюду на G) производительность источников равна нулю. Если $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$, то это означает, что на самом деле в соответствующей точке имеет место сток.

Из физических соображений ясно, что $\operatorname{div} \mathbf{a}$ есть инвариант относительно любых преобразований прямоугольных координат. Но это заключение можно сделать и на основании математических соображений, если учесть, что поток вектора через поверхность S_ε есть инвариант.

Этим доказано, что если одно и то же поле вектора определяется в двух прямоугольных системах координат (x, y, z), (x', y', z') соответственно функциями

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} = \\ = P_1(x', y', z')\mathbf{i}_1 + Q_1(x', y', z')\mathbf{j}_1 + R_1(x', y', z')\mathbf{k}_1,$$

то в одной и той же точке

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P_1}{\partial x'} + \frac{\partial Q_1}{\partial y'} + \frac{\partial R_1}{\partial z'}.$$

Конечно, это утверждение можно доказать непосредственно, не прибегая к теореме Гаусса — Остроградского.

Дивергенцию $\mathbf{a}$ можно рассматривать еще как (символическое) скалярное произведение оператора ∇ Гамильтона на вектор $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

С этой точки зрения указанную инвариантность можно доказать следующим образом. ∇ и $\mathbf{a}$ — векторы, а скалярное произведение двух векторов инвариантно относительно преобразований прямоугольных координат, поэтому этим свойством обладает и дивергенция $\nabla\mathbf{a}$.

Формулу Гаусса — Остроградского можно записать в плоском случае, когда G есть область в плоскости (x, y) и $\mathbf{a}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ — определенное на ней поле. Если $\mathbf{n}(A)$ есть внешняя нормаль к кусочно гладкому контуру Γ области G $(A \in \Gamma)$, то имеет место равенство

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_\Gamma (\mathbf{an})\,ds,$$

где ds — дифференциал дуги Γ.

Если считать, что направление касательной в точке контура Γ совпадает с положительным направлением обхода по Γ, вдоль которого исчисляется также длина дуги контура Γ, то

$$\cos(n, x) = \cos(T, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(T, x) = -\frac{dx}{ds}.$$

Поэтому $(\mathbf{an})ds = P\,dy - Q\,dx$,

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_\Gamma (P\,dy - Q\,dx).$$

Если в этой формуле заменить соответственно P, Q на Q, $-P$, то мы придем к формуле Грина, которая уже была получена в § 13.5.

Пусть G есть ограниченная область с гладкой дважды непрерывно дифференцируемой границей S и G_λ — часть G, ограниченная поверхность S_λ, точки которой отстоят от S по направлению нормали к S на расстоянии $\lambda > 0$ (см. § 7.25). Пусть еще задано поле вектора $\mathbf{a}$, непрерывного на $\bar{G}$ и имеющего непрерывные частные производные на G. Вблизи границы G последние могут быть неограниченными. Будем считать, что область G_λ при достаточно малом λ удовлетворяет требованиям, которые предъявляются к областям, чтобы для них была верна теорема Гаусса — Остроградского.

Покажем, что в этом случае формула Гаусса — Остроградского ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$)

$$\int\limits_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\mathbf{x} = \int\limits_S (\mathbf{an})\, ds \tag{8}$$

остается верной, если ее левую часть понимать в следующем несобственном смысле:

$$\int\limits_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\mathbf{x} = \lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{G_\lambda} \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\mathbf{x}. \tag{9}$$

Что касается правой части (8), то это есть обычный интеграл второго рода по гладкой ориентированной в сторону внешней нормали поверхности S, потому что вектор $\mathbf{a}$ непрерывен на S.

В самом деле, на основании уже доказанной теоремы Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_{G_\lambda} \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\mathbf{x} = \int\limits_{S_\lambda} (\mathbf{an})\, ds_\lambda \quad (0 < \lambda \leqslant \mu), \tag{10}$$

где μ достаточно мало, потому что S_λ при достаточно малом λ есть гладкая поверхность (§ 7.25), а вектор $\mathbf{a}$ не только непрерывен на $\bar{G}_\lambda$, но и имеет там непрерывные частные производные.

Покажем, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{S_\lambda} (\mathbf{an})\, ds_\lambda = \int\limits_S (\mathbf{an})\, ds, \tag{11}$$

откуда в силу (10) следует (8) и (9) в предположении, что S можно разрезать на конечное число элементарных гладких кусков:

$$S = \sum_{l=1}^{N} S^l. \tag{12}$$

Соответственно, S_λ разрезается на куски:

$$S_\lambda = \sum_{l=1}^{N} S_\lambda^l, \tag{13}$$

где S_λ^l состоит из точек G, лежащих на нормалях к S^l на расстоянии λ до S^l. Пусть S^l определяется равенством $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Тогда декартовы координаты (ξ, η, ζ) точек S_λ^l определяются уравнениями

$$\xi = \varphi(x, y, \lambda), \quad \eta = \psi(x, y, \lambda), \quad \zeta = \chi(x, y, \lambda) \quad (x, y) \in \Omega,$$

где Ω — замыкание плоской ограниченной области с кусочно гладкой границей, а φ, ψ, χ — непрерывно дифференцируемые функции от (x, y, λ), описывающие на $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu$ при достаточно малом μ гладкую поверхность S_λ^l. Эффективные выражения этих функций см. § 7.25 (5), $n = 3$, $t = \lambda$.

Тогда имеем (пояснения ниже)

$$\int\limits_{S_\lambda^l} (\mathbf{an})\, dS_\lambda^l = \pm \iint\limits_{\Omega} \frac{\mathbf{a}\left(\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y\right)}{\left|\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y\right|}\, dx\, dy \to \int\limits_{S^l} (\mathbf{an})\, ds \quad (\lambda \to 0), \tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y = \frac{D(\psi, \chi)}{D(x, y)}\mathbf{i} + \frac{D(\chi, \varphi)}{D(x, y)}\mathbf{j} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\mathbf{k},$$

где в $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\xi, \eta, \zeta)$ надо ξ, η, ζ заменить соответственно функциями φ, ψ, χ. В самом деле, под интегралом во втором члене (14) стоит непрерывная функция от (x, y, λ) на замкнутом ограниченном множестве $(x, y) \in \Omega$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu$, и можно переходить к пределу при $\lambda \to 0$ под знаком интеграла (см. § 12.13, теорема 1). Подобные факты имеют место, если S^k проектируется взаимно однозначно на плоскость $x = 0$ или $y = 0$. Из (14), (12) и (13) следует (9) и (8).

§ 13.11. Ротор вектора. Формула Стокса *)

Пусть в некоторой области пространства R задано поле непрерывно дифференцируемого вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Ротор вектора $\mathbf{a}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Его можно рассматривать как векторное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектора $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}.$$

Из векторной алгебры известно, что векторное произведение двух векторов есть аксиальный вектор, т. е. оно инвариантно относительно преобразований прямоугольных систем координат, имеющих одну и ту же ориентацию, т. е. таких, что правая система переходит в правую, а левая — в левую. Но мы знаем (см. § 7.6), что символ ∇ можно рассматривать как вектор, потому что его компоненты $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ преобразовываются при переходе от прямоугольной системы (x, y, z) к другой прямоугольной системе (x', y', z') по тем же правилам, по которым преобразовываются компоненты обычных векторов. Поэтому $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$ есть аксиальный вектор, т. е. инвариантный относительно преобразований прямоугольных систем координат, не меняющих их ориентацию. Следовательно, мы можем, не вычисляя, сказать, что если наш вектор $\mathbf{a}$ имеет в новой (также ориентированной) прямоугольной

*) Д. Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.