Тогда имеем (пояснения ниже)

$$\int\limits_{S^l_\lambda} (\mathbf{an})\, dS^l_\lambda = \pm \iint\limits_{\Omega} \frac{\mathbf{a}\left(\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y\right)}{\left|\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y\right|}\, dx\, dy \to \int\limits_{S^l} (\mathbf{an})\, ds \quad (\lambda \to 0), \tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y = \frac{D(\psi, \chi)}{D(x, y)}\,\mathbf{i} + \frac{D(\chi, \varphi)}{D(x, y)}\,\mathbf{j} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\,\mathbf{k},$$

где в $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\xi, \eta, \zeta)$ надо ξ, η, ζ заменить соответственно функциями φ, ψ, χ. В самом деле, под интегралом во втором члене (14) стоит непрерывная функция от (x, y, λ) на замкнутом ограниченном множестве $(x, y) \in \Omega$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu$, и можно переходить к пределу при $\lambda \to 0$ под знаком интеграла (см. § 12.13, теорема 1). Подобные факты имеют место, если S^k проектируется взаимно однозначно на плоскость $x = 0$ или $y = 0$. Из (14), (12) и (13) следует (9) и (8).

§ 13.11. Ротор вектора. Формула Стокса *)

Пусть в некоторой области пространства R задано поле непрерывно дифференцируемого вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Ротор вектора $\mathbf{a}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Его можно рассматривать как векторное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектора $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}.$$

Из векторной алгебры известно, что векторное произведение двух векторов есть аксиальный вектор, т. е. оно инвариантно относительно преобразований прямоугольных систем координат, имеющих одну и ту же ориентацию, т. е. таких, что правая система переходит в правую, а левая — в левую. Но мы знаем (см. § 7.6), что символ ∇ можно рассматривать как вектор, потому что его компоненты $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ преобразовываются при переходе от прямоугольной системы (x, y, z) к другой прямоугольной системе (x', y', z') по тем же правилам, по которым преобразовываются компоненты обычных векторов. Поэтому $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$ есть аксиальный вектор, т. е. инвариантный относительно преобразований прямоугольных систем координат, не меняющих их ориентацию. Следовательно, мы можем, не вычисляя, сказать, что если наш вектор $\mathbf{a}$ имеет в новой (также ориентированной) прямоугольной

*) Д. Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

системе координат компоненты

$$\mathbf{a} = P_1(x', y', z')\mathbf{i}' + Q_1(x', y', z')\mathbf{j}' + R_1(x', y', z')\mathbf{k}',$$

то имеет место тождество

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial R_1}{\partial y'} - \frac{\partial Q_1}{\partial z'}\right)\mathbf{i}' + \left(\frac{\partial P_1}{\partial z'} - \frac{\partial R_1}{\partial x'}\right)\mathbf{j}' + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x'} - \frac{\partial P_1}{\partial y'}\right)\mathbf{k}',$$

где $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ — единичные орты в системе (x', y', z').

Нам предстоит обосновать формулу Стокса *)

$$\iint_S (\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{a})\,ds = \int_\Gamma (\mathbf{a}\,dl), \tag{1}$$

выражающую, что *поток вектора* $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ *через ориентированную поверхность* S^* *равен циркуляции* $\mathbf{a}$ *по контуру* Γ *этой поверхности, ориентированному соответственно ориентации* S^*.

Начнем с доказательства теоремы Стокса для гладкого куска, взаимно однозначно проектируемого на все три координатные плоскости.

Зададим ориентированный гладкий кусок S^* поверхности с кусочно гладким краем Γ, который можно записать тремя способами:

$$z = f(x, y)\ \ (x, y) \in S_z,\ \ x = \varphi(y, z)\ \ (y, z) \in S_x,$$

$$y = \psi(z, x)\ \ (z, x) \in S_y.$$

Предполагается, таким образом, что любое из этих уравнений разрешается относительно любой из переменных, а функции f, φ, ψ непрерывно дифференцируемы на соответствующих проекциях S на координатные плоскости.

Имеем

$$\iint_S (\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{a})\,ds = \iint_S \left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n, z)\right\} ds. \tag{2}$$

Выберем в правой части (2) члены, содержащие P. Тогда (пояснения ниже)

$$-\iint_S \left\{\frac{\partial P}{\partial y}\cos(n, z) - \frac{\partial P}{\partial z}\cos(n, y)\right\} ds =$$

$$= -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cos(n, z)\,ds = -\iint_{S_z^*} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y))\,dx\,dy =$$

*) Мы считаем, что S^* означает ориентированную посредством нормали $\mathbf{n}$ поверхность S. Левая часть (1) есть интеграл по поверхности 1-го рода.

$$= \int\limits_{\Gamma_z} (P(x, y, f(x, y)))dx = \int\limits_0^{s_0} P[\varphi(s), \psi(s), f(\varphi(s), \psi(s))]\, \varphi'(s)\, ds =$$

$$= \int\limits_0^{s_0} P(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\, \varphi'(s)\, ds = \int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\, dx. \qquad (3)$$

Из пропорции

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : (-1) = \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z)$$

следует, что

$$\cos(n, y) = -\frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z),$$

что влечет первое равенство в цепи (3). Второе равенство см. § 13.9, (5). Третье равенство следует из формулы Грина.

Последние три равенства в цепи (3) справедливы, если считать, что ориентированный контур Γ определяется кусочно гладкими функциями $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$.

Первые две из этих функций в свою очередь определяют Γ_z — проекцию Γ на плоскость $z = 0$, соответственно ориентированную. Надо учесть, что Γ есть край поверхности S, определяемой равенством $z = f(x, y)$, и потому $\chi(s) = f(\varphi(s), \psi(s))$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$.

По аналогии доказывается, что

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos(n, z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(n, x)\right) ds = \int\limits_{\Gamma} Q(x, y, z)\, dy, \qquad (4)$$

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos(n, x) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(n, y)\right) ds = \int\limits_{\Gamma} R(x, y, z) dz. \qquad (5)$$

Из (3), (4), (5) следует формула Стокса (1).

Мы доказали теорему Стокса для куска ориентированной поверхности, одновременно проектирующегося на все три плоскости координат. Имеется еще один важный простой случай, который непосредственно не охвачен нашими рассмотрениями. Мы имеем в виду тот случай, когда σ^* есть кусок, принадлежащий некоторой плоскости, параллельной одной из осей координат. Для такого куска теорема Стокса тоже верна. В этом можно убедиться непосредственными вычислениями, подобными (3). Но можно рассуждать так. Интегралы, входящие в формулу Стокса, инвариантны относительно преобразований прямоугольных координат, не меняющих ориентацию последних. Всегда можно подобрать преобразование этого типа так, что σ^* будет проектироваться на любую из плоскостей координат новой системы. А в этом случае теорема доказана.

Формула Стокса остается верной для любой ориентированной поверхности S^* с кусочно гладким краем Γ, которую можно разбить при помощи кусочно гладких линий на конечное число гладких кусков, проектирующихся на все три плоскости координат.

В самом деле, пусть $S^* = \sigma_1^* + \sigma_2^* + \ldots + \sigma_N^*$ есть такое разбиение и пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ — соответственно ориентированные контуры $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_N^*$. Тогда, согласно доказанному выше,

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot} \mathbf{a}\, d\sigma) = \sum_{j=1}^N \iint\limits_{\sigma_j} (\operatorname{rot} \mathbf{a}\, d\sigma) = \sum_{j=1}^N \int\limits_{\Gamma_j} (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}) = \int\limits_\Gamma (\mathbf{a}\, d\mathbf{s}),$$

потому что части интегралов $\int\limits_{\Gamma_j}$ $(j = 1, \ldots, N)$, берущихся вдоль внутренних кусков Γ_j (не принадлежащих Γ), проходятся два раза в противоположном направлении и дают эффект, равный нулю.

Ориентированная поверхность, которую можно разбить на конечное число треугольников (плоских), называется *полиэдральной* поверхностью и представляет собой пример простейшей поверхности, к которой применима формула Стокса.

Сделаем еще одно замечание. Пусть σ_ε обозначает круглую определенным образом ориентированную площадку с центром в точке $A = (x, y, z)$ радиуса ε с ориентирующим ее единичным вектором $\mathbf{n}$ и γ_ε — ее ориентированный контур. Согласно формуле Стокса

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{a}\, d\mathbf{S}) = \int\limits_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a})\, d\sigma_\varepsilon = \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, d\sigma_\varepsilon = |\sigma_\varepsilon| \operatorname{rot}_n a_1,$$

где $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$ есть скалярная функция, равная проекции $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ на направление $\mathbf{n}$, а $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}_1$ есть значение этой функции в некоторой средней точке σ_ε. Отсюда следует, что значение функции $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$ в точке A равно

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\sigma_\varepsilon|} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{a}\, d\mathbf{S}), \tag{6}$$

где при предельном переходе при $\varepsilon \to 0$ предполагается, что вектор $\mathbf{n}$ — неизменный. В любой правой (левой) системе координат правая часть (6) есть одно и то же число. Однако при замене правой системы на левую и неизменном $\mathbf{n}$ направление обхода σ_ε изменяется на противоположное, что влечет изменение знака в правой части (6). Таким образом, мы снова, но другим путем, убедились в инвариантности $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ относительно преобразований прямоугольных координат, сохраняющих ориентацию последних.

З а м е ч а н и е. Пусть на области Ω задано поле непрерывно дифференцируемого вектора $\mathbf{a}$ такого, что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$. Если на замкнутом контуре $\Gamma \subset \Omega$ можно натянуть гладкую ориентированную поверхность с (ориентированным) краем Г, то согласно теореме Стокса интеграл от a по Г равен

$$\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{l}) = \iint\limits_{S} (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a})\, dS = 0$$

Это утверждение может служить основанием для доказательства теоремы 3 § 13.3. Но и на этом пути не избежать сложных рассуждений, потому что надо иметь в виду, что в любой области существуют замкнутые (заузливающиеся) контуры, на которые невозможно натянуть гладкую поверхность.

§ 13.12. Дифференцирование интеграла по параметру

Начнем с того, что докажем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\Omega} f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{1}$$

где предполагается, что Ω — замкнутое измеримое множество пространства точек $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, а f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на множестве $H = [a, b] \times \Omega$ ($x \in [a, b]$, $\mathbf{y} \in \Omega$).

В частности, если Ω есть отрезок $[c, d]$, то формула (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{c}^{d} f(x, y)\, dy = \int\limits_{c}^{d} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, dy \tag{1'}$$

в предположении, что f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на $[a, b] \times [c, d]$.

В самом деле, пусть

$$F(x) = \int\limits_{\Omega} f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

тогда

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{h} [f(x+h, \mathbf{y}) - f(x, \mathbf{y})]\, d\mathbf{y} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} (x + \theta h, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \to \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} (x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (h \to 0, \ 0 < \theta < 1),$$

потому что

$$\left| \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial x} (x + \theta h, \mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial x} (x, \mathbf{y}) \right] d\mathbf{y} \right| \leqslant \int\limits_{\Omega} \omega\left(|h|, \frac{\partial f}{\partial x} \right) d\mathbf{y} =$$

$$= |\Omega|\, \omega\left(|h|, \frac{\partial f}{\partial x} \right) \to 0 \quad (h \to 0),$$